Über
geometrische Approximationen.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

hohen philosophischen Fakultät

der

Georg-Augusts-Universität zu Göttingen

vorgelegt von

Paul Böhmer

aus Goschütz.

BERLIN 1904.

Universitäts-Buchdruckerei von Gustav Schade (Otto Francke)

Linienstraße 158.

Tag der mündlichen Prüfung: 22. Mai 1903.
Referent: Herr Prof. Dr. **H. Minkowski.**

Meinen lieben Eltern.

Einleitung.

Die vorliegende Arbeit wurde ursprünglich angeregt durch die Vorlesung von Herrn Klein im Sommer 1901 über Differentialgeometrie, in der Herr Klein mit besonderem Nachdruck den grundsätzlichen Gegensatz von Ideal- und Realgebilden betont hat. Dieser Gegensatz ist zum Ausgangspunkt der Untersuchungen der ersten Kapitel gewählt worden; dabei verstehe ich unter Idealgebilden solche, die durch ein vollständiges, endliches Axiomensystem bestimmt sind, unter Realgebilden dagegen irgend welche empirisch gegebenen Dinge. — Die Untersuchungen des zweiten Kapitels über nächste Gebilde habe ich zum Teil zusammen mit Herrn Kirchberger ausgeführt; die gemeinsam gefundenen Sätze hat Herr Kirchberger bereits in seiner Arbeit über Tschebyschefsche Annäherungsmethoden (Diss. Göttingen 1902) veröffentlicht (S. 26 bis 28). Das dritte Kapitel behandelt in allgemeiner Weise den Begriff der Differentialformeln und führt die Rechnung an einfachen Beispielen durch.

Die Untersuchungen des letzten Kapitels, das sich nur lose an die vorhergehenden anlehnt, sind durch Herrn Minkowski veranlaßt worden, der mir den Beweis des Theorems über elliptisch-konvexe Ovale als Aufgabe stellte.

Kapitel I.

Ideal- und Realgebilde.

§ 1. Idealisierung und Approximation.

Wenn wir geometrische Idealgebilde (Punkte, Kurven, Figuren) durch Zeichnungen physisch realisieren, sind die physischen Abbilder den idealen Urbildern nicht in allen wesentlichen Stücken gleich; denn aus zwei Quellen entspringen Unterschiede zwischen beiden: die eine Quelle kommt aus der mathematischen Unbestimmtheit physischer Dinge überhaupt hervor, während die andere, die physiologische Quelle, sich als Folge des begrenzten Unterscheidungsvermögens unseres Auges darstellt. Das allgemeine Problem, in dessen Gebiet die folgenden Erörterungen fallen, besteht nun darin, den Grad und die Grenzen der Übereinstimmung geometrischer Ideal- und Realgebilde zu untersuchen.

Da nun die Mathematik als Lehre von den Idealgebilden ihrem Wesen nach auf die Untersuchung solcher beschränkt ist, ist es notwendig, die Realgebilde, die Abbilder, wieder zu idealisieren, und zwar so, daß einerseits die neuen Ideale nicht identisch sind mit den Urbildern und daß zweitens die neuen Ideale in genauerer Übereinstimmung mit den Realgebilden sind als die Urbilder. Wir führen diesen Idealisierungsprozeß in der Weise aus, daß wir die Forderungen, die die reine Mathematik an ihre Idealgebilde und die erzeugenden Hilfsmittel stellt, unter Berücksichtigung jener beiden Unterschiedsquellen umgestalten.

Die Präzisionsmathematik würde bezüglich des Substrats, der Hilfsmittel und des Baumaterials der Zeichnung folgende Forderungen aufstellen:

I. Das Substrat soll starr, eben und unbegrenzt sein.

II. Das Lineal soll starr, gerade und unbegrenzt sein; der Zirkel soll in seinen Teilen starr, in seinem Gelenke nicht schlotternd und ohne Selbstsperrung, in seiner Spannweite unbegrenzt sein.

III. Punkte, Graden und Kurven sollen Idealgebilde sein.

Während nun die physische Begrenztheit von Substrat und Hilfsmitteln durch geeignete Einschränkung der Konstruktionsparameter in praktische Übereinstimmung mit der mathematischen Unbegrenztheit gebracht werden kann, bedarf es bei den übrigen Forderungen einer eingehenderen Behandlung. Bei dem Konstruktionsmaterial tritt die physische Beschaffenheit gegen den physiologischen Gesichtspunkt in den Hintergrund; denn die physikalische Betrachtungsweise, die einen Strich in ein unregelmäßiges Aggregat kleiner Körper auflöst, würde einen viel zu feinen Maßstab an das Material legen: leuchtet es doch unmittelbar ein, daß wir nicht genauer konstruieren können, als wir sehen können. Nun lehrt die Physiologie des Auges, daß die Zapfenelemente der Netzhaut ein Mosaikbild der Außenwelt aufnehmen, dessen Steine eine gewisse Größe nicht unterschreiten. Das ergibt aber eine untere Grenze des wahrnehmbaren Gesichtswinkels und damit für die normale Sehweite von 25 cm zwei[1]) Größen ε_1 und ε_2, die als die kleinsten Strichbreiten und Fleckdurchmesser anzusehen sind. Bedenkt man, daß die Sichtbarkeit jedoch auch von der Lichtintensität abhängig ist, daß ferner die eintretende Ermüdung ein dauerndes Operieren an der Grenze der Sichtbarkeit ausschließt, so sieht man, daß die kleinste für das Zeichnen zulässige Strichbreite $2\omega_1$ und die kleinste Fleckbreite $2\omega_2$ größer als ε_1 und ε_2 sein müssen. Wir haben für das Zeichnen mit Bleistift oder Reißfeder die Größen $2\omega_1$ und $2\omega_2$ zu 0,08 bezw. 0,10 mm gefunden.

Auf Grund der besprochenen Tatsachen idealisieren wir nun das Baumaterial in folgender Weise, die wir als Neuformulierung von Forderung III aussprechen:

IIIa. Wir setzen voraus, daß die Strichbreite ein Maximum $2\omega_1$ nirgends überschreite; und wir verfahren

---

[1]) I. a. wird $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ sein, da für die Sichtbarkeit noch Nebenbedingungen erfüllt sein müssen, denen beim Strich sicherer genügt wird als beim Fleck.

so, als ob die Mittellinie des Striches die durch ihn repräsentierte Idealgrade oder -kurve wäre. — Bezüglich des Flecks, markiert durch einen Zirkel- oder Federstrich, setzen wir voraus, daß er ganz im Innern eines Kreises gelegen sei, dessen Radius eine Größe ω_2 nicht überschreite; und wir verfahren so, als ob der Mittelpunkt dieses Kreises der durch den Fleck repräsentierte Idealpunkt wäre.

Das wichtigste Fortgangsprinzip aller geometrischen Konstruktionen ist das der vereinigten Lage von Punkt und Kurve. Wir geben diesem Prinzipe eine neue, mit unseren physiologischen Grundanschauungen übereinstimmende Fassung, indem wir es dahin aussprechen, daß Fleck und Strich vereinigt heißen sollen, wenn sie nicht als getrennt wahrgenommen werden. Und dies wird dann der Fall sein, wenn der kleinste Abstand ihrer Ränder[1]) eine Größe ε_3 nicht erreicht, falls ε_3 eine positive oder ε_3 nicht unterschreitet, falls ε_3 eine negative Größe ist. (Welcher von beiden Fällen statthat, konnten wir nicht entscheiden; auch ist dies für die Methode gleichgültig.) Wenn wir nun drei neue Größen ω_1', ω_2', ω_0' durch die Gleichungen $\omega_1' = \omega_1 + \frac{\varepsilon_3}{2}$, $\omega_2' = \omega_2 + \frac{\varepsilon_3}{2}$, $\omega_0' = \omega_1' + \omega_2'$ definieren, so werden wir die Bedingung der Inzidenz als erfüllt ansehen, wenn die Entfernung des Idealpunktes von der Idealgraden ω_0' zur oberen Grenze, d. h. praktisch zum Maximum hat[2]) (Fig. 1). Wir legen nun im weiteren Verlaufe die neuen Größen ω_1', ω_2', ω_0' zu Grunde und führen für sie wieder die akzentlosen Buchstaben ω_1, ω_2 und ω_0 ein.

Wir gehen nun zur Definition der Spielräume über. Wir verstehen unter dem Spielraume eines Schnittfleckes denjenigen Bereich der Zeichenebene, der alle Idealpunkte enthält, deren zugehörige Flecken mit den beiden sich durchdringenden Strichen vereinigt liegen, oder kürzer: der alle Idealpunkte enthält, die mit

---

[1]) Dieser kleinste Abstand soll, wenn sich die Ränder nicht schneiden, positiv, andernfalls negativ gerechnet werden.

[2]) Daß hier und im folgenden mit dem Begriffe des Idealelements wie mit dem eines realen Dinges verfahren wird, ja daß sogar Ideallinien und -punkte zeichnerisch dargestellt werden, möge seine Entschuldigung in der erstrebten Kürze und Anschaulichkeit des Ausdrucks finden.

beiden Idealgraden (physiologisch) inzident sind (Fig. 2). Entsprechend nehmen wir in den Spielraum einer Verbindungsgraden zweier Flecken alle die Idealgraden auf, deren repräsentierende Realgraden mit beiden Flecken vereinigt liegen, oder kürzer: alle die Idealgraden, die mit beiden Idealpunkten (physiologisch) inzident sind (Fig. 3). Wir definieren demgemäß Punktreihe und Strahlenbüschel in der Weise: Drei gleichartige Realelemente sind in abhängiger Lage, wenn ein duales Realelement existiert, das mit allen dreien vereinigt liegt (Fig. 4).

Die Figuren des Strahlenbüschels und der Punktreihe geben uns Anlaß zu einer kurzen Ausführung, die eine bedeutende Vereinfachung der Methode herbeiführen wird. Es ist in dem oben erwähnten zellenförmigen Bau unserer Netzhaut begründet, daß wir als Raumelement den Punkt der Graden gegenüber zu bevorzugen geneigt sind; kommt es doch unmittelbar zu unserer Wahrnehmung, wenn mehrere Graden durch einen Punkt gehen, während wir, um uns die gebundene Lage von Punkten zur Wahrnehmung zu bringen, der Vermittelung einer physisch gegebenen Graden, etwa des Lineals oder des Lichtstrahls, bedürfen. Aber aus denselben anatomischen Gründen ist auch die Wahrnehmung des gemeinsamen Schnittpunktes dreier Graden keine vollkommene; es wird bei hinreichender Feinheit der Linien ein kleiner freier Raum, ein fehlerzeichnendes Dreiseit, zwischen den Graden bestehen können, ohne wahrgenommen zu werden, wenn es nämlich unter die Grenze der Sichtbarkeit fällt. Um diesem Umstande Rechnung zu tragen und gleichzeitig eine vollständige Konformität der Behandlung dualer Elemente in die Methode zu bringen, wollen wir immer sowohl beim Strahlenbüschel wie bei der Punktreihe das duale Realelement als Vermittler einschalten; wir gelangen auf diese Weise zu einem alternierenden Konstruktionsprinzip, indem wir immer auf einen Punkt eine Grade (Kurve) folgen lassen und umgekehrt; oder vielmehr, indem wir bei der Beurteilung der Konstruktion so verfahren, als ob nach dieser Regel gezeichnet worden wäre.

Die einheitliche Durchführung des Idealisierungsprozesses führt oft zu Schwierigkeiten, die nicht in dem Wesen des zu untersuchenden Realgebildes, sondern vielmehr in der Wahl des Hilfsideals begründet sind; da nun der Zweck des Idealisierungsprozesses doch nur darin besteht, die Anwendung der Mathematik

auf das Realgebilde zu ermöglichen, und somit nicht die durchgängige Festhaltung des einmal gewählten Idealgebildes erfordert, wird man dieses an geeigneter Stelle durch andere Hilfsideale ersetzen, falls diese nur einen gleichen Übereinstimmungsgrad mit dem Realgebilde besitzen und eine leichtere geometrische oder arithmetische Darstellung gestatten. Den Prozeß, der dies leistet, wollen wir als Approximationsprozeß benennen.

Wir beginnen mit der Frage nach der Bestimmtheit gegebener Größen. Inwieweit ist eine Strecke geometrisch oder arithmetisch genau gegeben? Wenn wir die Strecke mit dem Zirkel abgreifen, ob von einem Bilde der Strecke oder von einem Maßstabe, ist dabei gleichgültig, so ist das Messungsergebnis von den zwei Fehlerquellen an den beiden Enden der Strecke beeinflußt und daher mit einem möglichen Fehler $\pm(\omega_1 + \omega_2) = \pm\,\omega_0$ behaftet (Fig. 5). Ebenso ergibt sich, daß ein Winkel nur bis auf einen Spielraum $\pm\,\frac{\omega_0}{r}$ bestimmt ist, unter r den Radius des Hilfskreises verstanden. Ist ein Punkt der Zeichenebene gegeben, so beträgt zwar der Spielraum an sich $\pm\,\omega_2$ nach jeder Richtung hin; während jedoch beim Ziehen von Strichen durch diesen Punkt die Abweichung der Idealgraden auf $\omega_2 + \omega_1 = \omega_0$ in normaler Richtung anwächst, gestattet es die physische Veränderung, die das Einstechen der Spitze im Substrat zurückläßt, mit der Zirkelspitze dasselbe Stichloch aufs neue aufzufinden, wenn wir einen Kreis um diesen einmal markierten Punkt zu beschreiben haben, und verhindert so das Auftreten einer Fehlerquelle. Haben wir es endlich mit gegebenen Graden oder Kreisen zu tun, so erhöht sich der Spielraum $\pm\,\omega_1$, den sie an sich besitzen, auf $\pm\,\omega_0$, sobald wir Punkte an sie anschließen.

Aus diesen Erwägungen ergibt sich nun, daß wir, falls wir den geometrischen Konstruktionen eine gewisse approximative Bestimmtheit wahren wollen, unsere Untersuchungen und Methoden auf diejenigen Fälle beschränken müssen, in denen wir die Größen ω_0 und $\frac{\omega_0}{r}$ gegen die gegebenen oder andere mittelbare Zeichnungsparameter zu vernachlässigen berechtigt sind[1]); dann aber

[1]) Was man als vernachlässigbar ansehen will, hängt im Einzelnen von der erstrebten Genauigkeit der Resultate ab.

werden wir auch die Teile der Spielräume, die höhere Potenzen der ω enthalten, gegen solche mit niederen Potenzen vernachlässigen dürfen. Dies führt dazu, die Leitsätze der Approximationsmethode in folgender Form auszusprechen:

1. Die Entfernung zweier Flecken, die einen graden Strich definieren sollen, darf nicht unter eine Minimalgröße $K\omega_0$ sinken; zugleich wird die Winkeldifferenz zweier Idealgraden durch dieselben erzeugenden Flecken als Null betrachtet.

Wir denken uns also im Detail das Strichsystem der Fig. 3 als erzeugt durch bloße Verschiebung der Idealgraden und messen die Strichbreite normal zu dieser. So gewinnen wir das vereinfachte Bild der Fig. 6. Die Größe des im Linienspielraum gelegenen Stückes 2β der Normalen zur Mittellinie soll als die Spielbreite der Verbindungsgraden im Punkte X benannt werden. Die Größe der Spielbreite hängt vom Teilungsverhältnis $\lambda = XA:XB$ ab; wir erhalten für die Abschnitte I, II, III beziehungsweise folgende Formeln für den Betrag der Spielbreite:

$$2\beta_{I} = 2 \cdot \frac{\lambda\omega_0 + \omega_0}{1-\lambda}, \quad 2\beta_{II} = 2 \cdot \frac{\lambda\omega_0 - \omega_0}{\lambda - 1} = 2\omega_0,$$

$$2\beta_{III} = 2 \cdot \frac{\lambda\omega_0 + \omega_0}{\lambda - 1}.$$

2. Der Winkel zweier Striche, die einen Schnittfleck definieren sollen, darf unter eine Minimalgröße $\frac{2}{\sqrt{K}}$ nicht sinken; zugleich betrachten wir alle Idealwinkel, die ihren Scheitel im Schnittfleck haben, und deren Schenkel durch je einen Realpunkt auf je einem der Striche gehen, als gleich (falls die beiden letztgenannten Realpunkte in Bezug auf den Schnittfleck dem Leitsatz 1 genügen).

3. Der Radius einer Kreislinie, die zur Schnittpunktdefinition benutzt werden soll, darf nicht unter eine Minimalgröße $K\omega_0$ sinken; zugleich ersetzen wir die Kreislinie in der Umgebung eines Schnittpunktes durch eine Tangente.

Wir sehen also von der Krümmung ab und gewinnen so Fig. 7 als Bild für den Schnittpunkt zweier Kreislinien. Der nach

Größe und Gestalt bestimmte Spielraum soll Spielfläche genannt werden. Ihre Gestalt und Größe hängt wesentlich nur vom Schnittwinkel σ ab, und zwar gilt für die Größe 4φ der Spielfläche die Formel:

$$4\varphi = \frac{4\,\omega_0^2}{\sin\sigma}.$$

Unser letzter Leitsatz versagt zunächst, wenn wir die Spielfläche eines Berührungspunktes definieren wollen, den eine von P an den Kreis um O gelegte Tangente mit dem Kreise gemein hat; wir nehmen zum Zwecke der Definition die Polare von P oder den Halbkreis über OP zu Hilfe (Fig. 8): die beiden entstehenden Spielflächen sind symmetrische Parallelogramme, da die Polare durch Inversion am Kreise O in den Halbkreis über OP übergeht.

Da es beim Fortgange einer geometrischen Konstruktion oft vorkommt, daß nur die Projektion einer Spielbreite oder -fläche auf eine Grade in den folgenden Spielraum eingeht, wollen wir für diese Projektionen den abkürzenden Namen Spielkomponente einführen.

Die Approximationssätze kommen darauf hinaus, daß man die Grundkonstanten ω wie Differentiale behandelt, indem man bei den Spielkomponenten nur Größen von der Ordnung ω^1 berücksichtigt, Größen dagegen, die von höheren Potenzen der ω abhängig sind, unberücksichtigt läßt. In diesem Sinne können wir die Gleichungen für Spielbreite und Spielfläche als Differentialformeln bezeichnen.

Wir haben die Zeichnung bisher nur in ihrer Abhängigkeit von den geometrischen Elementen betrachtet; es entsteht nun für uns die Aufgabe, dem Substrat und den Werkzeugen solche Eigenschaften vorzuschreiben, daß das gewählte Annäherungsverfahren unberührt bleibt; wir erreichen dies durch folgende Neuformulierung der Forderungen I und II.

Ia. Das Substrat darf von einer Idealebene nur um Größen erster Ordnung abweichen.

Dann werden bei senkrechter Federführung die elementaren Figuren erst in zweiter, die projektiven erst in dritter Ordnung beeinflußt, was wir verabredetermaßen vernachlässigen.

IIa. Das Lineal und der Zirkel sollen den früheren Forderungen soweit genügen, daß die Abweichung von

diesen Forderungen nur direkte Fehler zweiter Ordnung an den geometrischen Elementen verursacht.

Damit sind die beiden Prozesse zu Ende geführt.

§ 2. Spielräume und Genauigkeit.

Die Entwickelungen des vorigen Paragraphen setzen uns in den Stand, zwei allgemeine Sätze über die Spielräume, die im Verlaufe einer Konstruktion auftreten, auszusprechen.

Bei festen Grundkonstanten, ω_0, ω_1, ω_2, sind die Spielbreiten, Spielflächen und Spielkomponenten invariant gegenüber den Ähnlichkeitstransformationen der Gesamtfigur; dabei sind die Hilfszeichnungen in den Begriff der Gesamtfigur hineingezogen.

Da nämlich die Spielräume nur voneinander, den Teilungsverhältnissen, den Schnitt- und Projektionswinkeln abhängen, ergibt sich der Satz durch vollständige Induktion.

Die sämtlichen Spielräume hängen nur von einer einzigen Grundkonstanten ab, nämlich von $\omega_0 = \omega_1 + \omega_2$.

Denn ändert man Strichbreite und Fleckdurchmesser in der Weise ab, daß ihre Summe konstant bleibt, so bleiben nach der Inzidenzdefinition alle neuen Striche mit allen neuen Flecken inzident; da nun das alternierende Konstruktionsprinzip gilt, und somit jeder mögliche Spielraum der Inbegriff von Punkten oder Linien ist, die mit einem dualen Element physiologisch inzident sind, so bleiben auch alle Spielräume dieselben; sie können daher nur von der Summe $\omega_1 + \omega_2 = \omega_0$ abhängig sein.

Die Tatsachen, die in diesen beiden Sätzen ausgesprochen sind, ermöglichen uns eine verhältnismäßig einfache graphische Darstellung der Spielräume. Wir führen eine solche an einem ganz einfachen Beispiele der Elementargeometrie durch und lösen die Aufgabe: „Ein Dreieck aus den drei Seiten a, b, c zu zeichnen“ in der Weise, daß wir die Aussagen über die Abweichungen in die Konstruktion hinein verflechten. In der zugehörigen Fig. 9 sind die Spielräume in etwa 12facher Vergrößerung angebracht.

Man zeichne eine Grade als Basis, beschreibe um einen ihrer Punkte, A, — der also in normaler Richtung um $\pm \omega_0$ abliegen kann — einen Kreis mit dem Radius c $(c \pm \omega_0)$ und um denselben Punkt A einen zweiten Kreis mit b $(b \pm \omega_0)$; aus dem

Schnittpunkte B des ersten Kreises mit der Basislinie — der also längs der Basis den Spielraum $\pm 2\,\omega_0$, normal dazu einen solchen vom Betrage $\pm\,\omega_0$ hat — einen Kreis mit dem Radius a $(a \pm \omega_0)$, der den zweiten Kreis in C schneidet — dabei ist also die Spielkomponente längs B C gleich der Projektion $2\,\omega_b$ der gesamten Spielfläche bei B auf B C, vermehrt um die Unbestimmtheit von a selbst; von der Spielkomponente längs A C gilt Entsprechendes — und markiere C — wodurch die Spielfläche von C noch um einen Rahmen von der Breite ω_0 vergrößert wird. — Endlich haben wir noch, da das Dreieck der Elementargeometrie zugleich Dreiseit ist, die Verbindungslinien A C und B C zu ziehen, deren Spielbreiten sich dadurch bestimmen, daß man die Ausdehnung der Spielräume von A, B und C normal zu jeder Verbindungsgraden mißt und, vermehrt um $\pm\,\omega_0$, in den drei Ecken anbringt.

Berechnen wir nun zunächst die Spielflächen. Wie ersichtlich, kommt dem Punkte A nur eine Spielbreite $2\,\omega_0$ zu; die Spielfläche von B ist ein Rechteck von der Ausdehnung $4\,\varphi_B = 8\,\omega_0^2$. Da endlich die Spielkomponenten ω_a und ω_b bei A und B bezüglich gleich $\omega_0 \sin\alpha$ und $\omega_0 (2\cos\beta + \sin\beta)$ sind, ergibt sich als Spielfläche von C

$$4\,\varphi_C = 4\,\omega_0^2\,(2 + 2\cos\beta + \sin\beta)\,(2 + \sin\alpha)\,\sin\gamma^{-1}\,.$$

Die Spielbreiten der Dreiecksseiten stellen sich folgendermaßen dar: die Spielbreite von A B ist konstant $2\,\beta_{AB} = 2\,\omega_0$; für die beiden anderen Seiten erhält man das Formelsystem:

$$\left\{\begin{aligned} 2\,\beta_{BC} &= 2\,\frac{\lambda\,\omega'' - \omega'}{\lambda - 1}\,, \quad \lambda = \frac{XB}{XC} \\ \omega'' &= \omega_0 + (\omega_b + 2\,\omega_0)\sin\gamma^{-1} + (\omega_a + 2\,\omega_0)\,\mathrm{tg}\,\gamma^{-1} \\ \omega' &= \omega_0 \cos\alpha \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} 2\,\beta_{AC} &= 2\,\frac{\lambda\,\omega'' - \omega'}{\lambda - 1}\,, \quad \lambda = \frac{XA}{XC} \\ \omega' &= \omega_0 + (\omega_a + 2\,\omega_0)\sin\gamma^{-1} + (\omega_b + 2\,\omega_0)\,\mathrm{tg}\,\gamma^{-1} \\ \omega'' &= \omega_0\,(2\sin\beta + \cos\beta). \end{aligned}\right.$$

Damit sind die „Differentialformeln“ für die Konstruktion eines Dreiecks aus den drei Seiten erledigt.

Man kann diese Konstruktion auf 12 verschiedene Arten lösen, da es freisteht, zunächst eine der drei Seiten oder einen der drei

Eckpunkte festzulegen und dann entweder im Sinne des Uhrzeigers oder umgekehrt fortzuschreiten. Wenn man, wie oben geschehen, mit einer Seitenrichtung beginnt, so wird es, da φ_C in den Winkeln α, β, γ nicht symmetrisch ist, unter den 6 möglichen Konstruktionen i. a. eine geben, für die der letzte Spielraum einen kleinsten Wert erhält. Die hierauf gerichtete Frage: „Mit welcher Seite muß man beginnen, und in welchem Sinne muß man fortschreiten, damit der letzte Spielraum seinen kleinsten Wert erhält?“ beantwortet unsre Formel für das von uns gewählte Beispiel: a = 129, b = 146, c = 154 dahin, daß man mit der größten Seite beginnen und die kleinste anschließen muß. Denn berechnet man 4φ des letzten Spielraums für die 6 möglichen Konstruktionen, die durch die Reihenfolge der Seiten gegeben sind, so erhält man:

$$4\varphi(c, a, b) = 11{,}500 \,.\, 4\,\omega_0^2 \quad \text{(vergl. Fig. 9)}$$
$$4\varphi(b, a, c) = 11{,}645 \,.\, 4\,\omega_0^2$$
$$4\varphi(c, b, a) = 12{,}552 \,.\, 4\,\omega_0^2$$
$$4\varphi(b, c, a) = 13{,}464 \,.\, 4\,\omega_0^2$$
$$4\varphi(a, b, c) = 13{,}663 \,.\, 4\,\omega_0^2$$
$$4\varphi(a, c, b) = 14{,}473 \,.\, 4\,\omega_0^2.$$

Aus den Werten ersieht man zugleich, daß es am ungünstigsten wäre, mit der kleinsten Seite, a, zu beginnen.

Die behandelte Konstruktion ist wesentlich die einzige, deren Lösung keine Hilfskonstruktion mit willkürlichen Parametern erheischt. Man erkennt aber, daß die Aufstellung der Differentialformeln für Konstruktionen mit willkürlichen Parametern keine prinzipiellen Schwierigkeiten verursacht, und daß sich an jede Konstruktion in ähnlicher Weise wie an unser Beispiel ein Minimumproblem anschließt, dessen Lösung uns die beste Konstruktionsmethode enthüllt, wenn wir alle möglichen Anordnungen des Aufbaues der Gesamtkonstruktion in entsprechender Weise behandeln.

Es scheint uns hier der passende Ort zu sein, um die Anschauungen und Methoden von E. Lemoine in unsern Gedankengang einzuordnen. Lemoine geht davon aus, daß der Aufbau einer Zeichnung auf die mannigfachste Art ausgeführt werden kann und daß es daher wünschenswert ist, denjenigen Aufbau herauszufinden, der der einfachste ist und zugleich im Schluß-

resultat den kleinsten Fehler involviert. Bei Figuren, die aus wenigen Elementen zusammengesetzt sind, ist die günstigste Wahl oft durch bloße Anschauung zu treffen; dies ist jedoch keineswegs in der Regel der Fall, zumal sich schon solche Konstruktionen, die sich in wenige Worte fassen lassen, bei genauerem Zusehen oft als sehr zusammengesetzt ergeben. Um nun ein allgemeines Prinzip zur Entscheidung der Frage nach der Einfachheit und Genauigkeit von Konstruktionen zu gewinnen, unterscheidet er folgende Grundoperationen:

I. Linealoperationen.

1. Das Lineal durch einen gegebenen Punkt P zu legen, R_1, ... (ω_0).
2. Die zugehörige Linie wirklich zu ziehen, R_2, . (0).
3. Eine Linie durch P_1 und P_2 zu ziehen, $R_3 = 2R_1 + R_2$ . . . . ($2\omega_0$).

II. Zirkeloperationen.

1. In einen gegebenen Punkt P die Zirkelspitze zu stechen, C_1, ... (0 oder $2\omega_0$).
2. In einen beliebigen Punkt einer Linie die Zirkelspitze zu stechen, C_2, ... (ω_0).
3. Einen Kreis zu zeichnen, C_3, ... (0).

(Wir haben bei dieser Aufzählung die Abweichung, die sich bei Abzählung der Fehlerquellen aus unsrer Auffassung ergibt, in Klammern beigefügt.)

Dann nennt Lemoine die Größe $E = n_1 R_1 + n_2 R_2 + n_3 C_1 + n_4 C_2 + n_5 C_3$, wo n_ν angibt, wie oft die betreffende Operation auszuführen ist, für $R_1 = R_2 = C_1 = C_2 = C_3 = 1$, die Einfachheit (simplicité) der Konstruktion, während er die entsprechend berechnete Größe $G = n_1 R_1 + n_3 C_1 + n_4 C_2$ als das Genauigkeitsmaß (exactitude) der Konstruktion bezeichnet. Über den Begriff der Einfachheit, dessen zweckmäßige Festsetzung nur Sache der Praxis, nicht aber der Theorie ist, dürfen wir hier hinweggehen; was aber das Genauigkeitsmaß anlangt, so müssen wir unterscheiden, ob ein Punkt, in den die Zirkelspitze eingesetzt werden soll, schon markiert ist (was gemäß früheren Erörterungen keine Fehlerquelle ist), oder ob dieser Punkt als Schnittpunkt zweier Graden vorliegt, wobei sich die Zirkelspitze von jeder der beiden Idealgraden um $\pm\omega_0$ entfernen kann; wir müssen daher in der Formel den

Begriff C_t auf diesen letzteren Fall einschränken und außerdem den Faktor 2 beifügen.

Es scheint uns zweckmäßig, die Genauigkeit in anderer Weise zu bestimmen; und zwar definieren wir die Genauigkeit einer einzelnen Punkt- oder Linienlage durch den Quotienten von $4\,\omega_0^2$ durch die Größe $4\,\varphi$ der Spielfläche, bez. durch den Quotienten von $2\,\omega_0$ durch die Größe $2\,\beta$ der Spielbreite (Spielkomponente). Die Genauigkeit ist dann ein positiver echter Bruch, dessen Wert von den Dimensionen der Zeichnung und dem Betrage von ω_0 unabhängig, vielmehr nur noch eine Funktion der gegebenen Winkel und der Verhältnisse der gegebenen Strecken ist. Um die Genauigkeit einer Konstruktion zu messen, wird es sich empfehlen, die Genauigkeit des größten Spielraums oder des Endspielraums als Genauigkeit der Gesamtfigur zu betrachten. Was für Spielräume in Betracht zu ziehen sind, ist aus der Fragestellung der Aufgabe zu schöpfen; ist z. B. die Genauigkeit einer Zehneckskonstruktion zu finden, so wird man zur Genauigkeit dieser Konstruktion die Genauigkeit der Spielkomponente des zehnten Polygonpunktes in der Richtung der zugehörigen Kreistangente wählen.

Es erhebt sich schließlich die Frage, ob es nicht möglich ist, für einen beliebigen Spielraum einer Konstruktion, etwa für die n-te Spielfläche, eine allgemeine Näherungsformel abzuleiten, die dem Lemoineschen Genauigkeitsmaße entsprechen würde. Da der Versuch einer Majorantenbildung daran scheitert, daß in den Nennern der Spielflächen ein Sinus steht, dessen untere Grenze eine Funktion von K ist, so wird man, um eine Näherungsformel für den n-ten Spielraum aufzustellen, die Wahrscheinlichkeitstheorie zu Hilfe nehmen müssen, was über den Rahmen dieser Arbeit hinausgeht. Eins aber läßt sich auch ohne Kenntnis der fraglichen Formel schon mit Bestimmtheit voraussagen, daß nämlich in ihr die Anzahl n der Spielflächen als Potenzexponent auftritt. Das Lemoinesche Genauigkeitsmaß, das die Elementareinflüsse einfach addiert, wird daher wohl im allgemeinen über die Größenfolge zweier verschiedener Spielräume richtig entscheiden, keineswegs aber über ihr Größenverhältnis.

Kapitel II.

Existenz und Eigenschaften nächster Gebilde.

§ 3. Problemstellung.

Wir definieren die Entfernung eines Idealpunktes von einer Idealkurve durch die Länge ω des kleinsten der Lote, die man von dem Punkte nach der Kurve ziehen kann. Dann nennen wir gemäß einer früheren Verabredung Idealpunkt und Idealkurve inzident, wenn $\omega \leqq \omega_0$ ist.

Es mögen nun $p > \frac{1}{2} n . (n+3)$ Punkte einer Ebene gegeben sein; es soll entschieden werden, ob eine algebraische Kurve n-ter Ordnung, C_n, existiert, die mit allen p Punkten inzident liegt.

Wir denken uns eine beliebige C_n in der Ebene der Punkte und bezeichnen den Betrag der Entfernung des k-ten Punktes von der C_n mit $|\omega_k|$; es werden dann sämtliche Punkte mit der Kurve inzident sein, wenn für den größten der Beträge die Bedingung $|\omega_m| \leqq |\omega_0|$ erfüllt ist. Gelingt es uns nun, eine C_n so zu bestimmen, daß der größte der Beträge $|\omega_m|$ das kleinste Minimum wird, so ergibt sich, daß im Falle $|\omega_m| \leqq |\omega_0|$ solche Kurven existieren, im Falle $|\omega_m| > |\omega_0|$ dagegen nicht.

Seien z. B. drei Punkte gegeben und gefragt, ob es eine Grade gibt, die mit allen dreien inzident ist, so errichten wir auf der kleinsten Höhe h des Dreiecks das Mittellot. Dann ist die Entfernung dieser Graden von den drei Punkten $|\omega_1| = |\omega_2| = |\omega_3| = \frac{h}{2}$ das Minimum, das das größte der drei Lote in Bezug auf eine variable Grade annehmen kann. Denn beschreibt man mit $\frac{h}{2}$ Kreise um die gegebenen Punkte, so berühren sie das Mittellot und werden von ihm so getrennt, daß es keine Grade gibt, die

alle drei Kreise schneidet; somit gibt es auch keine Grade, für die die größte Entfernung kleiner ausfällt, als für das Mittellot. Es existieren also Graden, die mit allen drei Punkten inzidieren, nur im Falle $\frac{h}{2} \leqq \omega_0$.

Wir spezialisieren für das Folgende die Zahl p zu $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ und haben es daher im Sinne der gewöhnlichen Auffassung mit einfach überbestimmten Gebilden zu tun. Dann lautet das Problem, das uns zunächst beschäftigen wird: Man soll zu einem ebenen $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$-Eck eine C_n so bestimmen, daß die größte der $\frac{n+1 \, . \, n+2}{2}$-Entfernungen der Ecken von der C_n ein Minimum wird. Es fragt sich nun zunächst, ob das vorliegende Variationsproblem Lösungen besitzt und welche Mächtigkeit die Anzahl etwaiger Lösungen hat. Wir werden aber den Existenzbeweis erst im folgenden Paragraphen führen und hier nur einen Satz über die Eigenschaften der Lösungen ableiten, der uns zugleich über die Mächtigkeit Aufschluß geben wird.

Wir behaupten, daß ein Minimum nur dann vorliegen kann, wenn alle $|\omega_k|$ gleich sind. Denn angenommen, es trete für eine bestimmte C_n der größte Betrag $|\omega_m|$ bei $a < p$ Punkten auf, während also bei $p - a$ Punkten kleinere Entfernungen stattfinden, so bestimme man eine neue C_n' in folgender Weise: Man trage auf den a größten Loten von der Kurve aus eine kleine Strecke ε ab und lege durch die Endpunkte sowie durch $p - a - 1$ der Fußpunkte der kleineren Lote eine Kurve C_n', die durch diese Festsetzung i. a. eindeutig definiert ist $\left(p - 1 = \frac{n(n+3)}{2}\right)$. Dann sind für diese $p - 1$ Punkte die Entfernungen sämtlich kleiner oder gleich $\omega_m - \varepsilon$; und ob nun für den p-ten Punkt die Entfernung gewachsen ist oder abgenommen hat, wird stets für genügend kleines ε die Bedingung $|\omega_p'| \leqq |\omega_m - \varepsilon|$ wegen der Stetigkeit erfüllt sein. Es lag somit für C_n kein Minimum vor und die Behauptung ist erwiesen.

Damit aber geht unser Variationsproblem in ein algebraisches Problem über; denn die Anzahl p der gegebenen

Größen stimmt mit der Anzahl der gesuchten Größen, nämlich ω und $\frac{n(n+3)}{2}$ Koeffizienten, überein. Es gibt also nur eine endliche Anzahl von Lösungen. Diejenigen reellen C_n, die unter diesen Lösungen des kleinste ω aufweisen, nennen wie die nächsten C_n des p-Ecks.

Was wir über Ordnungskurven ausgeführt haben, läßt sich unter Umständen, deren genaue Abgrenzung hier zu weit führen würde, auf Klassenkurven, K_n, übertragen, wenn man die Entfernung einer Graden von einer K_n durch den kleinsten der Abstände zwischen der Graden und den ihr parallelen Kurventangenten definiert. Sei z. B. ein Punkt so zu bestimmen, daß die größte seiner Entfernungen von drei gegebenen Graden ein Minimum wird, so genügt der Mittelpunkt des dem Dreiseit eingeschriebenen Kreises vom Radius ω dieser Bedingung. Denn der Streifen, den die zwei Parallelen im Abstande $\pm \omega$ zu einem der gegebenen Strahlen begrenzen, enthält alle Punkte, die von diesem Strahle eine Entfernung $\leqq \omega$ haben. Da die drei Streifen nur einen einzigen gemeinsamen Punkt besitzen, so gibt es keinen Punkt, für den die größte der Entfernungen kleiner ausfallen kann als ω.

Man erkennt ferner, daß auch für einfach überbestimmte, nicht allgemeine Kurven (Kreis und 4-Eck oder 4-Seit, Parabel und 5-Eck oder 5-Seit, etc.) der Satz von der ω-Gleichheit und die Definition des nächsten Gebildes bestehen bleibt.

Hierdurch aber haben wir das Mittel gewonnen, in zweckmäßiger Weise ein Maß für die Abweichung eines p-Ecks (oder p-Seits) von algebraischen Kurven mit $p-1$ Parametern zu definieren. Wir nennen den Abstand ω des nächsten C_n (K_n) von den Punkten des p-Ecks (Graden des p-Seits) die Abweichung des nächsten Gebildes oder des Polygons.

§ 4. Existenzbeweis.

Die rechtwinkeligen Koordinaten von 6 Punkten, die keinem Kegelschnitt angehören, seien $x_1 y_1$, $x_2 y_2$, . . . $x_6 y_6$. Wir betrachten nun die Determinante

$$R = \begin{vmatrix} \mu & x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ \mu_1 & x_1^2 & x_1 y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mu_6 & x_6^2 & x_6 y_6 & y_6^2 & x_6 & y_6 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\mu \,.\, (-D) + \Sigma\, (-1)^k \mu_k\, F^{(k)}(x\,y); \qquad [k = 1, 2, 3, \ldots 6]$$

und nennen die Größe $-D$ die **Determinante des Sechsecks**; sie ist n. V. stets von Null verschieden. Die sechs Gleichungen

$$F^{(k)} = a_{11}^{(k)} x^2 + 2\, a_{12}^{(k)} x\, y + \ldots + a_{33}^{(k)} = 0$$

stellen die 6 Kegelschnitte dar, die durch je 5 der 6 Eckpunkte gehen; wir benennen sie als die **Fundamentalkegelschnitte** und behaupten, daß sich ein beliebiger Kegelschnitt

$$F(x\,y) = a_{11} x^2 + 2\, a_{12} x\, y + \ldots + a_{33} = 0$$

in der Form $F = \Sigma \lambda_k F^{(k)}$ darstellen läßt, unter den λ_k Zahlen verstanden. Denn erteilt man μ den Wert Null und setzt $\mu_k = F(x_k\, y_k)$, so ergibt sich einmal der Wert von R zu

$$\Sigma (-1)^k F(x_k\, y_k) \,.\, F^{(k)}(x\, y);$$

andrerseits ist aber auch $R = F(x\,y) \,.\, D$, was man leicht durch Transformation von R nachweist (Subtraktion der mit a_{11}, $2\, a_{12}, \ldots a_{33}$ multiplizierten zweiten bis siebenten Spalte von der ersten).

Damit ist aber die Behauptung erwiesen, indem die Identität besteht

$$F(x\,y) = \Sigma \frac{(-1)^k F(x_k\, y_k)}{D} \,.\, F^{(k)}; \qquad \lambda_k = \frac{(-1)^k \,.\, F(x_k\, y_k)}{D}\,.$$

Es läßt sich also jeder Kegelschnitt der Ebene linear homogen aus den 6 Fundamentalkegelschnitten durch je 5 Punkte eines allgemeinen Sechsecks zusammensetzen und zwar sind bei der oben gewählten Gestalt der $F^{(k)}$ die Parameter λ_k bis auf das Vorzeichen proportional mit den Werten, die $F(x\,y)$, als Funktion der Ebene aufgefaßt, in den 6 Punkten annimmt. Für reelle Kegelschnitte sind also jene λ_k sicher alle reell.

Um nun die Existenz von nächsten Kegelschnitten des gegebenen Sechsecks nachzuweisen, deuten wir die reellen Variablen

$\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_6$ als Koordinaten einer 6-dimensionalen Mannigfaltigkeit; es entspricht dann jedem F (x y) eine Grade (1-dimensional) dieses R_6, die durch den Anfangspunkt geht. Die Wandung $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots + \lambda_6^2 =$ Konst., die wir als die Repräsentantenkugel bezeichnen können, liegt ganz im Endlichen und hat mit jeder Graden durch den Anfangspunkt zwei diametrale Punkte gemeinsam; teilen wir sie also irgendwie in zwei kongruente Hälften und rechnen jedem der beiden entstehenden Bereiche die Hälfte des Randes hinzu, so haben wir eine ein-eindeutige Abbildung aller Kegelschnitte der Ebene auf eine ganz im Endlichen gelegene Wandung des R_6. Die Stetigkeit dieser Abbildung folgt aus dem algebraischen Karakter. Die Bedingung

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \Psi(\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_6) = 0 \quad [a_{\mu\nu} = \Sigma \lambda_k a_{\mu\nu}^{(k)}]$$

ist ferner eine algebraische Gleichung in den λ, sie stellt also einen 5-dimensionalen Kegel dar, der die Repräsentantenkugel in Gebiete mit positiver und negativer Determinante trennt. Da man von einem reellen zu einem imaginären Kegelschnitt in stetiger Weise nur durch einen Übergangskegelschnitt verschwindender Determinante gelangen kann, so sind die Gebiete reeller und imaginärer Kegelschnitte durch Teile der Wandung $\Psi(\lambda_1, \ldots \lambda_6) = 0$ getrennt. Man denke sich diese Wandungsteile konstruiert und diejenigen Bereichinneren ausgezeichnet, deren Punkte reelle Kegelschnitte repräsentieren. Ordnet man diesen Teilbereichen mit Einschluß des Randes $\Psi = 0$ die größte Entfernung ω_m des repräsentierten Kegelschnitts von den Sechseckspunkten als Funktionswert zu, so muß, da ω_m eine stetige, weil abteilungsweise algebraische, Funktion der λ ist, ω_m nach einem Satze von Weierstrass in diesen abgeschlossenen Teilbereichen mindestens ein Minimum ω haben, womit die Existenz von nächsten Kegelschnitten erwiesen ist.

Um den geführten Existenzbeweis auf die nächste C_n eines allgemeinen, d. h. keiner C_n angehörigen p-Ecks

$$[p = \frac{1}{2}(n+1).(n+2)]$$

zu übertragen, betrachten wir die Determinante

$$R = \begin{vmatrix} \mu, & x^n, & x^{n-1}y, & \ldots & y^n, & x^{n-1}, & \ldots & 1 \\ \mu_1, & x_1^n, & x_1^{n-1}y_1, & \ldots & y_1^n, & x_1^{n-1}, & \ldots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mu_p, & x_p^n, & x_p^{n-1}y_p, & \ldots & y_p^n, & x_p^{n-1}, & \ldots & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\mu(-D) + \Sigma(-1)^k \mu_k F^{(k)}(x\,y); \quad [k = 1, 2, 3, \ldots p];$$

dabei bestehen die Elemente einer Zeile aus den p-Produkten $x^r y^s$, für die $r + s \leqq n$ ist, und sind nach fallendem Grade und nach fallenden Potenzen von x geordnet. — D, die Determinante des p-Ecks, ist n. V. von Null verschieden; die p-Kurven $F^{(k)} = 0$ bezeichnen wir als die Fundamentalkurven n-ter Ordnung. Ist nun $F(x\,y) = 0$ eine ganz beliebige C_n, so ergibt sich in genau entsprechender Weise die Identität

$$F(x\,y) = (-1)^p \Sigma \frac{(-1)^k F(x_k\,y_k)}{D} \cdot F^{(k)}.$$

Deutet man wie oben die $\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_p$ als Koordinaten eines R_p und trennt auf der Repräsentantenkugel die Bereiche reeller und imaginärer F mit Hilfe der Gleichung der verschwindenden Diskriminante,

$$\Psi(\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_p) = 0,$$

indem man für die einzelnen Teilbereiche, in die $\Psi = 0$ die λ-Kugel zerlegt, feststellt, ob die zugehörigen Kurven reell oder imaginär sind, so läßt sich der Schluß auf das Minimum von ω_m in analoger Weise führen.

Zum Sechseck zurückkehrend, beweisen wir den Satz, daß zum Eintritt eines Minimums des größten Lotes folgende Bedingung erfüllt sein muß: Die Lote sind, längs der Kegelschnittperipherie gerechnet, abwechselnd nach außen und nach innen gerichtet. Denn hätten zwei sich folgende Lote denselben Richtungssinn, so lege man ein Kegelschnittbüschel durch die vier übrigen Fußpunkte; dann werden die zum ursprünglichen hinreichend benachbarten Kegelschnitte des Büschels, die das Lot von einem der zwei fraglichen Punkte treffen, auch das andere

Lot schneiden müssen, da zwei verschiedene Kegelschnitte nur vier Punkte gemein haben können. Somit kann ohne jene Abwechselung kein Minimum vorliegen.

Auch eine Unbestimmtheit der Reihenfolge durch Zusammenfall zweier Fußpunkte kann nie stattfinden. Denn liegt z. B. ein Kegelschnitt $F = 0$ vor, für den zwei Lote denselben Fußpunkt haben, so nehme man auf jedem der drei Bögen, die zwischen den vier übrigen Fußpunkten liegen, einen beliebigen Punkt und ferner den gemeinsamen Fußpunkt zu Grundpunkten eines Kegelschnittbüschels, dann werden die zu $F = 0$ hinreichend benachbarten Kegelschnitte, die eins der vier isolierten Lote schneiden, auch die drei anderen schneiden. Da hierbei wieder sämtliche $|\omega_k|$ abnehmen, genügt $F = 0$ nicht der Minimalbedingung.

Es läßt sich endlich noch zeigen, daß die Bedingungen der ω_k-Gleichheit und des abwechselnden Sinnes hinreichend sind für das Eintreten eines Minimums. Liegt nämlich ein solcher Kegelschnitt vor, so beschreibe man um die 6 Eckpunkte mit ω als Radius Kreise, die den Kegelschnitt $F = \Sigma \lambda_k F^{(k)}$ berühren; dann wird bei hinreichend kleinen Änderungen der λ_k die Reihenfolge der Fußpunkte auf dem Kegelschnitt erhalten bleiben. Gäbe es unter den so beschränkten Kegelschnitten einen solchen, $F' = 0$, der mit jedem der Kreisinneren einen Punkt gemein hätte, so müßte F' mit F in jedem der Intervalle zwischen zwei Fußpunkten auf F' einen Schnittpunkt haben, was nicht angeht.

Zu demselben Widerspruch führt die Annahme, daß es zwei Kegelschnitte F und F' gäbe, die beide der Minimalbedingung genügen, gleiche oder verschiedene Abweichung ω bezw. ω und ω' haben und dieselbe Fußpunktfolge aufweisen. Somit besteht ein Eindeutigkeitssatz in der Form: Für jede feste Reihenfolge der Fußpunkte kann höchstens ein Kegelschnitt existieren, der die Minimalbedingung erfüllt.

Eine Übertragung des Abwechselungssatzes auf höhere Kurven ist uns nicht gelungen. Dagegen braucht kaum erwähnt zu werden, daß sich der allgemeine Existenzbeweis für das p-Eck und die ergänzenden Sätze über das Sechseck, die nur auf projektiven und Stetigkeitsbetrachtungen beruhen, genau auf die dualen Figuren übertragen lassen.

§ 5. Das konvexe Sechseck.

Wir werden in einem späteren Teile nur solche Sechsecke betrachten, die aus einem Ellipsensechseck durch sehr kleine Verschiebungen hervorgegangen sind, sodaß die allgemeine Gestalt im wesentlichen erhalten bleibt und insbesondere das neue Sechseck wieder konvex ist. Daher beschränken wir unsere ferneren Betrachtungen überhaupt ganz auf das konvexe Sechseck.

Sechs Punkte $x_1 y_1$, $x_2 y_2$, . . . $x_6 y_6$ bilden ein konvexes Sechseck, wenn sie sich so in eine zyklische Reihenfolge bringen lassen, daß alle Determinanten

$$\begin{vmatrix} x_k & y_k & 1 \\ x_{k+1} & y_{k+1} & 1 \\ x_\mu & y_\mu & 1 \end{vmatrix} > 0 \quad [k, \mu = 1, 2, \ldots 6], \quad \mu \gtrless k, \quad k+1$$

sind. Das bedeutet geometrisch, jede Seitenlinie des Sechsecks

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_k & y_k & 1 \\ x_{k+1} & y_{k+1} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

teilt die Ebene in zwei Bereiche, deren einer die 4 übrigen Eckpunkte enthält, während das Innere des anderen frei von Eckpunkten ist. Die gradlinigen Wege zwischen zwei aufeinander folgenden Ecken heißen Seiten und bilden einen sich nicht durchsetzenden Streckenzug, der die Ebene in zwei Bereiche trennt, einen inneren mit endlichem Flächeninhalt, und einen äußeren. Wir nennen dieses Streckengebilde das „konvexe Hexagramm".

Es bestehen nun folgende leicht beweisbare Anschauungssätze: 1. Eine Grade schneidet die Seiten eines konvexen Hexagramms höchstens in zwei Punkten. Ferner: 2. Wählt man auf einer Seite des konvexen Hexagramms einen beliebigen Punkt aus, so bildet er mit einem der Eckpunkte seiner Seite und den 4 übrigen Eckpunkten wieder ein konvexes Sechseck; und allgemeiner: Wählt man auf jeder Seite je einen Punkt aus, so bilden diese 6 Punkte ein konvexes Sechseck.

Indem wir zur Darstellung eines beliebigen Kegelschnittes F durch die Fundamentalkegelschnitte $F^{(k)}$ zurückkehren, führen wir

den Begriff des Hauptbereiches ein. Wir nennen Hauptbereich den Inbegriff aller Kegelschnitte $F = \Sigma \lambda_k F^{(k)}$, für die alle λ positiv sind. Das Bild dieses Hauptbereiches auf der Repräsentantenkugel ist ein zusammenhängender Bereich, da man offenbar von jedem positiven λ-System zu jedem andern gradlinig übergehen kann, ohne daß auf dem Zwischenwege eins der λ das Zeichen wechselt. Die Kegelschnitte mit einigen $\lambda = 0$ bilden den Rand des Hauptbereiches.

Alle Kegelschnitte $F = \Sigma \lambda_k F^{(k)}$, die dem Innern des Hauptbereiches angehören, teilen die 6 Eckpunkte eines konvexen Sechsecks in drei innere und drei äußere, die sich abwechselnd folgen, wenn man unter der Folge ihre Folge im konvexen Polygon versteht.

Es ist nämlich auf Grund der Definition der $F^{(k)}$

$$F^{(k)}(x_\mu, y_\mu) = 0 \qquad \text{für } \mu \neq k,$$

und

$$F^{(k)}(x_k, y_k) = (-1)^k D,$$

unter $-D$ wieder die Determinante des Sechsecks verstanden. Somit ist $F(x_k\, y_k) = \lambda_k F^{(k)}(x_k\, y_k) = \lambda_k (-1)^k D$; da also die $F(x_k\, y_k)$ abwechselndes Vorzeichen haben, liegen die $x_k\, y_k$ abwechselnd innerhalb und außerhalb von F. Zugleich folgt hieraus, daß alle Kegelschnitte des Hauptbereiches reell sind. Es bleibt uns nun noch zu zeigen, daß immer die drei selben Punkte für alle F des Hauptbereiches äußere bezw. innere Punkte sind. Dazu genügt der Nachweis, daß alle F dasselbe Determinantenvorzeichen haben. Da ein F die Eckpunkte in innere und äußere trennt, schneidet er jede Seite ein und nur einmal. Man kann nun alle F des Hauptbereiches innerhalb desselben stetig in einander überführen, somit ist auch die Determinante von F eine stetige Funktion des Überführungsweges. Diese Determinante kann nie verschwinden; denn wäre sie einmal gleich Null, so würde F in ein Gradenpaar (oder Doppelgrade) ausarten, dann aber könnte F mit dem Hexagramm nur 4 (2) Schnittpunkte haben, was gegen das eben Bewiesene verstößt. Somit behält die Determinante ihr Vorzeichen und die Behauptung ist bewiesen.

Zugleich folgt hieraus wegen der Stetigkeit, daß alle $F^{(k)}$ dasselbe Determinantenvorzeichen haben. Es ist somit ein Eckpunkt $x_k\, y_k$ innerer oder äußerer, je nachdem er innerhalb

oder außerhalb von $F^{(k)}$ liegt. Ist aber über einen der Eckpunkte die Lagenentscheidung getroffen, so ist auch wegen der Abwechselung die Lage aller anderen mit festgelegt.

Um uns eine geometrische Anschauung über die Lage der Kegelschnitte des Hauptbereiches in der Sechseckebene zu verschaffen, benutzen wir den Satz, daß die Ecken eines konvexen Sechsecks nie auf 2 Hyperbelzweige verteilt liegen können. Hieraus folgt: Ist einer der Kegelschnitte des Hauptbereiches eine Hyperbel, so trennt ein einziger der beiden Hyperbelzweige alle 6 Punkte. Denn andernfalls müßten irgend zwei innere Punkte in den beiden verschiedenen Innenräumen der Hyperbel liegen und es müßten somit die Schnittpunkte der Hyperbel mit dem Hexagramm auf zwei verschiedenen Hyperbelzweigen liegen, was nicht angeht. Es sind somit alle $F = 0$ des Hauptbereiches Unikursalkurven im Sinne der analysis situs, indem der andere Zweig einer im Hauptbereiche etwa vorkommenden Hyperbel aus der Betrachtung ausscheidet.

Wir besprechen hier, ohne uns auf einen längeren Beweis der Richtigkeit einzulassen, zwei Figuren (10 u. 11), die uns einen klaren und deutlichen Begriff vom Fundamentalsystem der $F^{(k)}$ und seiner Beziehung zu den Hauptbereichskegelschnitten verschaffen können. Die erste Figur gibt uns ein ungefähres Bild für die Lage der $F^{(k)}$. Wie man sieht, bilden 3 Bögen der äußeren $F^{(k)}$, d. h. derjenigen $F^{(k)}$, für die $x_k\ y_k$ ein innerer Punkt ist, und drei der inneren $F^{(k)}$ je ein geschlossenes Bogendreieck; das äußere Dreieck umschließt das innere vollständig, weil die Annahme von Schnittpunkten zu Widersprüchen führt (2 Kegelsch. mit 6 gemeinsamen Punkten). Das zweite Bild, Fig. 11, gibt eine Darstellung im Sinne der analysis situs. Hier sind die 4 Bögen eingezeichnet, die zwei aufeinander folgende Sechseckpunkte verbinden. Wir benutzen die Figur, um nachzuweisen, daß alle Kegelschnitte des Hauptbereiches innerhalb des schraffierten Teiles der Figur 10 verlaufen. Es muß nämlich jeder dieser F so wie die punktierte Kurve verlaufen, jedes Vierbogenband einmal zerschneidend; denn verliefe einer der Kegelschnitte etwa wie die gestrichelte Kurve, indem er mit dem Innenraume einen Punkt P gemeinsam hätte, so müßte er, da er nicht vollständig im Innenraum liegen kann, den Rand ($F^{(1)}$, $F^{(3)}$, $F^{(5)}$) in mindestens 2 Punkten schneiden und müßte nun mit den sechs $F^{(k)}$ im ganzen 26 Schnittpunkte haben, was

unmöglich ist. Aus Stetigkeitsgründen kann aber auch kein Randkegelschnitt des Hauptbereichs einen Punkt des Inneren oder Äußeren unserer Figur treffen. Damit ist aber bewiesen: Alle Kegelschnitte des Hauptbereiches und seines Randes liegen ganz im Inneren des schraffierten Bogensechsecks.

Wir können nun leicht die Umkehrung des Haupttheorems beweisen: Wenn ein Kegelschnitt $F = 0$ die Punkte eines konvexen Sechsecks so trennt, daß die Ecken in ihrer konvexen Folge abwechselnd innen und außen liegen, dann liegt das Sechseck auf keinem Kegelschnitt.

Angenommen, es gäbe einen Kegelschnitt $F' = 0$, der die 6 Punkte enthält, so ersetze man einen der Punkte durch einen beliebig benachbarten in der Entfernung ε, der nicht auf F' liegt, und bilde die zugehörigen Fundamentalkegelschnitte des neuen Sechsecks. Dann gehört der vorausgesetzte Kegelschnitt $F = 0$ dem Hauptbereiche an und liegt also in dem schraffierten Bereich. Da dieser Bereich sich für unbegrenzt abnehmendes ε auf die Kurve $F' = 0$ zusammenzieht, kann man, da ja $F \neq F'$ ist, ε stets so klein wählen, daß $F = 0$ nicht dem Hauptbereich angehört, womit die Annahme als unzulässig erwiesen ist.

Wir wenden uns nun der Frage zu, wann der nächste Kegelschnitt dem Hauptbereiche angehört. Dabei tritt eine Schwierigkeit auf, die darin begründet ist, daß die Fußpunktfolge längs eines Kegelschnittes im Hauptbereiche nicht mit der konvexen Folge übereinzustimmen braucht, wie es z. B. Fig. 12 zeigt. Infolgedessen gehört keineswegs immer der nächste Kegelschnitt eines konvexen Sechsecks dem Hauptbereiche an. Wir führen nun den Beweis, daß der nächste Kegelschnitt im Hauptbereiche liegt, wenn das konvexe Sechseck folgender einschränkenden Bedingung A genügt:

(A) Beschreibt man um jeden der Punkte $x_k\, y_k$ mit der zugehörigen Entfernung von $F^{(k)}$ als Radius einen Kreis, dann sollen je drei aufeinander folgende Kreise so liegen, daß der mittlere durch eine Grade von den beiden andern getrennt werden kann (der Grenzfall einer Berührungsgraden der drei Kreise ist eingeschlossen).

Aus der Voraussetzung folgt, daß, wenn man aus jedem der Kreisinneren einen Punkt auswählt, diese sechs Punkte ein konvexes Sechseck bilden.

Sei nun $F = 0$ der nächste Kegelschnitt, so schneidet er alle 6 Kreise; die 6 Lotfußpunkte des nächsten Kegelschnitts liegen somit innerhalb der 6 Kreise und bilden ein konvexes Sechseck; ihre konvexe Folge stimmt nun einmal mit der konvexen Folge der gegebenen sechs Punkte und zweitens mit ihrer Folge auf dem nächsten Kegelschnitte überein. Somit liegen die 6 Eckpunkte in ihrer konvexen Folge abwechselnd innerhalb und außerhalb von $F = 0$, d. h. $F = 0$ gehört dem Hauptbereiche an.

Kapitel III.

Differentialformeln für den Kegelschnitt.

---

§ 6. Der nächste Kegelschnitt.

Es sei eine Ellipse $f = 0$ gegeben, deren Krümmungsradius ϱ überall größer ist als $K\omega_0$, unter K eine große Zahl verstanden. Auf der Ellipse seien 6 Punkte gegeben, deren Entfernungen die Größe $K\omega_0$ ebenfalls übertreffen. Diese 6 Punkte unterwerfen wir je einer Verschiebung von der Ordnung ω_0, derart, daß die neuen Punkte $x_1 y_1, \ldots x_6 y_6$ ein konvexes Sechseck bilden, das die Bedingung (A) des vorigen Paragraphen erfüllt. Bezeichnen wir die normalen Abweichungen dieser Punkte von der Ausgangsellipse mit $\omega_1, \omega_2 \ldots \omega_6$, wobei ω_k für äußere Punkte positiv, für innere negativ gerechnet wird, so kann man die ω_k stets so klein wählen, daß das variierte Sechseck der Bedingung (A) genügt, da diese für $\omega_1 = \omega_2 = \ldots = \omega_6 = 0$ jedenfalls erfüllt ist. Die 6 Fundamentalkegelschnitte des Polygons werden dann nur wenig von der Ausgangsellipse abweichen; ihre Koeffizienten werden sich nur um Größen von der Ordnung ω_0 von den entsprechenden der Ausgangsellipse, sowie von denen aller Ellipsen des Hauptbereiches unterscheiden. (Um

die Koeffizienten zu vergleichen, muß man sie natürlich erst durch die 3. Wurzel aus ihrer Determinante dividieren.)

Wir nehmen der Einfachheit wegen an, daß $f=0$ dem Hauptbereiche des Sechsecks $x_1 y_1, \ldots x_6 y_6$ angehöre, daß also $\omega_1, \omega_3, \omega_5$ das gleiche Vorzeichen haben, das dem von ω_2, ω_4 und ω_6 entgegengesetzt ist. Es ist nun das ganze Sechseck durch die 6 Fußpunkte ξ_k, η_k und die 6 Größen ω_k vollständig bestimmt: wir stellen die Aufgabe, den nächsten Kegelschnitt und seine Abweichung zu berechnen.

Man transformiere das Koordinatensystem so, daß $f=0$ den Nullpunkt in einer überall endlichen Entfernung $\geqq K\omega_0$ umschließt, z. B. indem man f auf die Normalform bringt. Um jetzt einen analytischen Ansatz für die Variation von f zu gewinnen, müssen wir uns erst einen einfacheren Ausdruck für das kleinste Lot von einem Punkte nach einem Kegelschnitte verschaffen, da das wirkliche Lot als Wurzel einer Gleichung 4. Grades rechnerisch unbrauchbar ist. Einem Vorschlage von Herrn Klein folgend, benutzen wir das halbe Lot vom Punkte $x_k y_k$ auf seine Polare in Bezug auf $f=0$ als Entfernungsdefinition, da dieses in der Tat bei unbegrenzter Annäherung von $x_k y_k$ an den Kegelschnitt nach Richtung und Größe gleichmäßig gegen das kleinste Lot von $x_k y_k$ nach $f=0$ konvergiert.

Bezeichnen wir mit $g(x, y)$ die eindeutige Funktion

$$\left|(f_1^2(x, y)+f_2^2(x, y))^{1/2}\right|,$$

die nur für den Mittelpunkt von f verschwindet, sonst aber überall von Null verschieden ist, unter f_1 und f_2 die halben partiellen Ableitungen von f nach x und y verstanden, so wird gemäß der getroffenen Bestimmung

$$2\,\omega_k=\frac{f(x_k, y_k)}{g(x_k, y_k)}.$$

Variieren wir nun f und setzen

$$\delta f=b_{11}x^2+2\,b_{12}xy+b_{22}y^2+2\,b_{13}x+2\,b_{23}y=\varphi(x, y),$$

so kommt

$$2(\omega_k+\delta\omega_k)=2\,\omega_k+\frac{\varphi}{g}-\frac{f(f_1\varphi_1+f_2\varphi_2)}{g^3}$$

$$\begin{aligned}2(\omega_k + \delta\omega_k) g = 2\omega_k g &+ b_{11} [x^2 (f_1^2 + f_2^2) - x f_1 (x f_1 + y f_2 + f_3)] \\ &+ b_{12} [2 x y (f_1^2 + f_2^2) - y f_1 (x f_1 + y f_2 + \\ &\quad f_3) - x f_2 (x_1 f_1 + y f_2 + f_3)] \\ &+ b_{22} [y^2 (f_1 + f_2^2) - y f_2 (x f_1 + y f_2 + f_3)] \\ &+ b_{13} [2 x (f_1^2 + f_2^2) - f_1 (x f_1 + y f_2 + f_3)] \\ &+ b_{23} [2 y (f_1^2 + f_2^2) - f_2 (x f_1 + y f_2 + f_3)].\end{aligned}$$

Die 5 Klammerausdrücke lassen sich noch in folgender Weise zusammenziehen:

$$\begin{aligned}[1] &= x (x f_2^2 - y f_1 f_2 - f_1 f_3) \\ [2] &= x (- x f_1 f_2 + y f_1^2 - f_2 f_3) + y (x f_2^2 - y f_1 f_2 - f_1 f_3) \\ [3] &= y (- x f_1 f_2 + y f_1^2 - f_2 f_3) \\ [4] &= x (f_1^2 + f_2^2) + x f_2^2 - y f_1 f_2 - f_1 f_3 \\ [5] &= y (f_1^2 + f_2^2) - x f_1 f_2 + y f_1^2 - f_2 f_3.\end{aligned}$$

Nun sind aber die Koordinaten X, Y des Fußpunktes der auf die Polare gefällten Senkrechten durch die Gleichungen bestimmt

$$\begin{aligned}X f_1 + Y f_2 &= - f_3 \\ X f_2 - Y f_1 &= x f_2 - y f_1\end{aligned}$$

und es ergibt sich

$$X = (x f_2^2 - y f_1 f_2 - f_1 f_3) g^{-2}; \quad Y = (- x f_1 f_2 + y f_2^2 - f_2 f_3) g^{-2};$$

unsere Klammerausdrücke nehmen somit die Gestalt an

$$[1] = x X g^2, \quad [2] = (x Y + y X) g^2, \quad [3] = y Y g^2,$$
$$[4] = (x + X) g^2, \quad [5] = (y + Y) g^2.$$

Wir begehen, wie man leicht einsieht, nur Fehler höherer Ordnung, wenn wir diese Klammerausdrücke in folgender Weise vereinfachen:

$$x X = \xi^2; \quad x Y + y X = 2 \xi \eta; \quad y Y = \eta^2;$$
$$x + X = 2 \xi; \; y + Y = 2 \eta,$$

wo unter ξ, η der Punkt von f verstanden ist, den man als Lotfußpunkt betrachten will, (z. B. den Schnittpunkt des Polarenlotes mit f). Erlegen wir jetzt den variierten Loten die Gleichheits- und Abwechselungsbedingung auf, so werden wir auf folgendes lineare Gleichungssystem nicht verschwindender Determinante geführt:

$$+ 2\omega g(x_1 y_1) + b_{11}\xi_1^2 + 2b_{12}\xi_1\eta_1 + b_{22}\eta_1^2 + 2b_{13}\xi_1 + 2b_{23}\eta_1 = -2\omega_1 g(x_1 y_1)$$
$$- 2\omega g(x_2 y_2) + b_{11}\xi_2^2 + 2b_{12}\xi_2\eta_2 + b_{22}\eta_2^2 + 2b_{13}\xi_2 + 2b_{23}\eta_2 = -2\omega_2 g(x_2 y_2)$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$- 2\omega g(x_6 y_6) + b_{11}\xi_6^2 + 2b_{12}\xi_6\eta_6 + b_{22}\eta_6^2 + 2b_{13}\xi_6 + 2b_{23}\eta_6 = -2\omega_6 g(x_6 y_6).$$

Hieraus bestimmen sich die 6 Unbekannten ω, b_{11}, b_{12}, . . b_{23} und zwar sind sie sämtlich, da $f + \varphi = 0$ wieder dem Hauptbereiche angehört, von der Ordnung ω_0. Nennen wir die Minoren der ersten Spalte der Koeffizientendeterminante $\alpha_{33}^{(1)}$, $\alpha_{33}^{(2)}$, . . . $\alpha_{33}^{(6)}$, so liefert die Auflösung nach ω das Resultat

$$\omega = \frac{\Sigma (-1)^k \omega_k \alpha_{33}^{(k)} g(x_k y_k)}{\Sigma \alpha_{33}^{(k)} g(x_k y_k)}.$$

Um diesen Ausdruck in eine rechnerisch brauchbare und geometrisch diskutierbare Form zu bringen, transformieren wir f auf die Normalform $\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} - 1 = 0$ und führen den „reduzierten Winkel“ t mittels der Gleichungen

$$\xi = a \,.\, \cos t, \qquad \eta = b \,.\, \sin t$$

ein. Drücken wir sin und cos durch $z = \operatorname{tg}\frac{t}{2}$ aus, so wird

$$\xi = a\frac{1 - z^2}{1 + z^2}, \qquad \eta = b\frac{2z}{1 + z^2}.$$

Die Fußpunkte $\xi_k\,\eta_k$ numerieren wir, falls es nötig sein sollte, neu, indem wir sie nach wachsendem t anordnen und zwar so, daß der Punkt mit kleinstem t der erste ist. Dann nimmt $\alpha_{33}^{(1)}$ nach leichter Umrechnung die Gestalt an

$$\alpha_{33}^{(1)} = \frac{64 \,.\, a^4 b^4}{\prod_2^6 (1 + z_k^2)^2} \begin{vmatrix} z_2^4 & z_2^3 & z_2^2 & z_2 & 1 \\ z_3^4 & . & . & . & 1 \\ z_4^4 & . & . & . & 1 \\ z_5^4 & . & . & . & 1 \\ z_6^4 & z_6^3 & z_6^2 & z_6 & 1 \end{vmatrix}.$$

Da diese Determinante gleich dem Differenzenprodukt der z_k (ohne z_1) ist, und da ferner die Gleichung

$$\sin \frac{t_h - t_k}{2} = \frac{z_h - z_k}{\sqrt{(1 + z_h^2) . (1 + z_k^2)}}$$

besteht, so wird schließlich

$$\alpha_{33}^{(1)} = 64 . a^4 b^4 \sin \frac{t_3 - t_2}{2} \sin \frac{t_4 - t_2}{2} \sin \frac{t_5 - t_2}{2} \sin \frac{t_6 - t_2}{2} \sin \frac{t_4 - t_3}{2}$$
$$\sin \frac{t_5 - t_3}{2} \sin \frac{t_6 - t_3}{2} \sin \frac{t_5 - t_4}{2} \sin \frac{t_6 - t_4}{2} \sin \frac{t_6 - t_5}{2}$$

Entsprechende Formeln gelten für die übrigen α_{33}, die sämtlich positiv sind. Da es nur auf das Verhältnis der α_{33} unter einander ankommt, erweitern wir alle α_{33} so, daß im Zähler das Produkt der Sinus aller 16 halben Winkeldifferenzen steht, und dies führt zu der Gleichung

$$\alpha_{33}^{(1)} : \alpha_{33}^{(2)} : \ldots : \alpha_{33}^{(6)} =$$
$$\frac{1}{\left| \Pi \sin \frac{t_h - t_1}{2} \right|} : \frac{1}{\left| \Pi \sin \frac{t_h - t_2}{2} \right|} : \ldots : \frac{1}{\left| \Pi \sin \frac{t_h - t_6}{2} \right|} .$$

Damit ist aber die Berechnung der α_{33} vollendet. Es folgt ferner: das Verhältnis der α_{33} untereinander ist nur von der Verteilung der 6 Punkte auf dem Kegelschnitt abhängig in der Weise, daß bei allen affin verwandten Sechsecken das gleiche α_{33}-Verhältnis eintritt; überträgt man die 6 Punkte durch gleiches t auf den „reduzierten Kreis“, so ist irgend eine Sehne zwischen zwei der Punkte dem Sinus der halben Winkeldifferenz dieser Punkte proportional, und damit ist die geometrische Bedeutung des α_{33}-Verhältnisses aufgedeckt.

Es bleibt noch die Bedeutung der $g(x, y)$ zu untersuchen. Da die Funktion $g^2(x, y)$ als quadratischer Ausdruck, der für den Mittelpunkt von $f = 0$ verschwindet, in einem beliebigen Punkte xy der Ebene einen Wert annimmt gleich dem Quadrat der Entfernung zwischen xy und dem Mittelpunkt, multipliziert mit einem Richtungsfaktor, so sind wir gemäß unseren Voraussetzungen berechtigt $g(x, y)$ durch $g(\xi, \eta)$ zu ersetzen, wo ξ, η wieder der zu x, y gehörige Fußpunkt ist. Berechnet man den Krümmungsradius $\varrho(\xi, \eta)$, so erhält man

$$\varrho = g^3 (\xi, \eta) \cdot \psi^{-1},$$

unter ψ die Determinante von f verstanden. (ϱ ist negativ, weil nach innen gerichtet.) Also wird der Faktor $g(\xi, \eta)$ oder $g(x, y)$ der dritten Wurzel aus dem Krümmungsradius proportional.

Das gesamte Resultat zusammenfassend können wir sagen: Die Abweichung des nächsten Kegelschnitts stellt sich dar als ein Quotient, dessen Zähler aus den 6 Entfernungen der Sechseckspunkte von einem beliebigen Hauptbereichskegelschnitt komponiert ist, mit Koeffizienten, deren Summe den Nenner bildet; diese Koeffizienten sind Produkte aus je einem „Verteilungsfaktor" und einem „Krümmungsfaktor".

Schließlich wollen wir die α_{33} noch durch andere Größen ersetzen, die von der Wahl des zu Hilfe genommenen Hauptbereichskegelschnitts unabhängig, vielmehr nur noch Funktionen des Sechsecks $x_1 y_1, x_2 y_2, \ldots x_6 y_6$ sind; führen wir nämlich in das lineare Gleichungssystem, aus dem wir ω bestimmt haben, statt der $\xi_k \eta_k$ die $x_k y_k$ ein, so gehen die Minoren der ersten Spalte in $a_{33}^{(1)}$, $a_{33}^{(2)}, \ldots a_{33}^{(6)}$ über; wir dürfen nun die $\alpha_{33}^{(k)}$ mit den $a_{33}^{(k)}$ vertauschen, wenn sich das Verhältnis der α_{33} untereinander von dem der a_{33} nur um kleine Größen unterscheidet. Um die Bedingung hierfür zu finden, nehme man an, daß $f = 0$ der nächste Kegelschnitt sei; dann sind, als Funktionen von ω betrachtet,

$$\alpha_{33}^{(k)} = a_{33}^{(k)}(0)$$
$$a_{33}^{(k)} = a_{33}^{(k)}(\omega),$$

und die fragliche Bedingung wird darin bestehen, daß

$$\left[\frac{d \log a_{33}^{(k)}(\omega)}{d\,\omega}\right]_{\omega = 0}$$

einen Zahlenwert $< K^{1/2}$ besitzen muß. Berechnet man den Ausdruck — die Ableitung würde hier zu weit führen —, so findet man in den Nennern seiner additiven Bestandteile noch die Sinus der halben Winkeldifferenzen vor; der Wert des Ausdrucks läßt sich somit aus den bisherigen Voraussetzungen nicht abschätzen, vielmehr bedarf es dazu der neuen Voraussetzung, daß die

$\sin\frac{t_h - t_k}{2}$ nicht unter eine bestimmte, von ω_0 unabhängige Größe sinken. Nehmen wir dies als erfüllt, so wird schließlich

$$\omega = \frac{\Sigma(-1)^k \omega_k a_{33}^{(k)} \varrho_k^{1/3}}{\Sigma a_{33}^{(k)} \varrho_k^{1/3}},$$

wobei ϱ_k für $\varrho(\xi_k, \eta_k)$ steht.

Da die $a_{33}^{(k)}$ von der Wahl des Hilfskegelschnittes unabhängig sind, werden wir das gleiche von den ϱ_k annehmen und von einer Krümmung des Hauptbereiches in der Umgebung von $x_k\, y_k$ reden; in der Tat ergibt sich auch die logarithmische Variation von $g(\xi, \eta)$ zu $(f_1 \varphi_1 + f_2 \varphi_2)\, \varrho^{-1} \psi^{-1}$, d. h. einer Größe von der Ordnung der ω_k.

Wir gehen nun dazu über, die **Gleichung des nächsten Kegelschnittes** in der geschlossenen Form

$$F = \Sigma \lambda_k F^{(k)} = 0$$

darzustellen, wo $F^{(k)} = 0$ der k-te Fundamentalkegelschnitt ist. Die λ_k sind, wie wir oben sahen, bis auf das Vorzeichen den Werten $F(x_k\, y_k)$ proportional; ferner haben wir gesehen, daß wir $g(x, y)$ mit $g(\xi, \eta)$ vertauschen dürfen und deshalb auch den Ausdruck

$$\frac{f(x_k, y_k)}{g(\xi_k, \eta_k)} = 2\,\omega_k$$

als Entfernungsdefinition benutzen dürfen, d. h. aber, es ist

$$F(x_k\, y_k) = (-1)^k\, 2\, \omega\, g(\xi_k\, \eta_k);$$

Somit erhalten wir nach Unterdrückung unwesentlicher Faktoren

$$F(x, y) = \Sigma \varrho_k^{1/3} F^{(k)}.$$

Der nächste Kegelschnitt ist also aus den 6 Fundamentalkegelschnitten mit Koeffizienten komponiert, die den dritten Wurzeln aus den Krümmungsradien des Hauptbereiches in der Umgebung der Eckpunkte proportional sind.

§ 7. Differentialformeln.

Die Formel

$$\omega = \frac{\Sigma (-1)^k \omega_k a_{33}^{(k)} \varrho_k^{1/2}}{\Sigma a_{33}^{(k)} \varrho_k^{1/2}}$$

können wir als Differentialformel bezeichnen, insofern wir die Größen ω_k so klein angenommen haben, daß wir ihre höheren Potenzen vernachlässigen konnten. Die Formel gab uns die Lösung eines Spezialfalles des allgemeinen Problems, das wir am Anfang des zweiten Kapitels gestellt haben. Wir wollen fernerhin allgemein unter einer Differentialformel erster Art die Gleichung verstehen, welche die Abweichung des nächsten Gebildes durch die Entfernungen der gegebenen Punkte oder Graden von einem dem gesuchten gleichartigen Gebilde ausdrückt, unter der Voraussetzung, daß diese Entfernungen sämtlich klein von der Ordnung ω_0 seien. Eine Differentialformel erster Art hat stets die Gestalt der Mischungsformel; wir setzen hier noch einige elementargeometrische Beispiele her: die Differentialformel erster Art für die Grade (Dreieck), den Punkt (Dreiseit) und den Ortkreis (konvexes Viereck).

Das Dreieck $A_1 A_2 A_3$ möge endliche Seitenlängen von den Beträgen $|A_1 A_2| = a_3$, $|A_2 A_3| = a_1$, $|A_3 A_1| = a_2$ haben, von der Beschaffenheit, daß die Gleichung $a_1 + a_3 = a_2$ bis auf Fehler von der Ordnung ω_0 richtig ist. Dann wird es stets Grade geben, deren Entfernungen von den drei Punkten ebenfalls von der Ordnung ω_0 sind. Besitzt nun eine dieser Graden von den Punkten $A_1 A_2 A_3$ die bezüglichen Entfernungen ω_1, ω_2, ω_3 (wobei Punkte, die von der Graden getrennt werden, das entgegengesetzte Entfernungsvorzeichen erhalten), so hat die nächste Grade die Abweichung

$$\omega = \frac{\Sigma (-1)^k \omega_k a_k}{\Sigma a_k}.$$

Seien entsprechend die Entfernungen der 3 Strahlen eines Dreiseits von einem im endlichen Ebenenteile gelegenen Punkte ω_1, ω_2, ω_3, so gilt für die Abweichung des nächsten Punktes die Differentialformel

$$\omega = \frac{\Sigma \sin \alpha_k \, \omega_k}{\Sigma \sin \alpha_k},$$

wenn wir mit α_k den inneren Winkel bezeichnen, der der Seite mit der Entfernung ω_k gegenüberliegt.

Sei endlich ein konvexes Viereck gegeben, $x_1 y_1, x_2 y_2 \ldots x_4 y_4$, und seien die 4 Entfernungen der Punkte von einem Kreise, ω_1, $\omega_2, \ldots \omega_4$, von der Ordnung ω_0, dann ergibt sich die Abweichung des nächsten Kreises zu

$$\omega = \frac{\Sigma (-1)^k \, \omega_k \, a_{33}^{(k)}}{\Sigma a_{33}^{(k)}};$$

dabei ist $a_{33}^{(k)}$ gleich derjenigen Determinante der Matrix

$$\begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 \\ x_4^2 + y_4^2 & x_4 & y_4 \end{vmatrix},$$

die durch Streichung der k-ten Zeile entsteht.

Was die Bestimmung des nächsten Gebildes selbst anlangt, so haben wir bereits früher (S. 18 u. 20) Strahlenbüschel und Punktreihe in geometrischer Weise behandelt, von wo aus man leicht die analytische Darstellung gewinnt. Für den nächsten Kreis eines konvexen Vierecks dagegen ist noch nachzutragen, daß er sich in eindeutiger Weise durch Konstruktion finden läßt (sein Mittelpunkt ist der Schnitt der Mittellote der beiden Diagonalen, sein Radius das arithmetische Mittel der 4 Verbindungsstrecken des Mittelpunkts mit den 4 Ecken), und daß seine Gleichung

$$F(x, y) = \begin{vmatrix} x^2 + y^2, & x, & y, & 1, & 0 \\ x_1^2 + y_1^2, & x_1, & y_1, & 1, & -1 \\ x_2^2 + y_2^2, & x_2, & y_2, & 1, & +1 \\ x_3^2 + y_3^2, & x_3, & y_3, & 1, & -1 \\ x_4^2 + y_4^2, & x_4, & y_4, & 1, & +1 \end{vmatrix} = \Sigma F^{(k)}$$

mit lauter gleichen Parametern aus den 4 Fundamentalkreisen komponiert ist.

Wir können nun die Fragestellung verallgemeinern, indem wir

jedem der Elemente x_k y_k ein gewisses Gewicht P_k erteilen und ein Gebilde suchen, dessen Entfernungen von den gegebenen Punkten sich bis auf das Vorzeichen wie die P_k verhalten sollen. Offenbar erhalten wir das nächste Gebilde, wenn die P_k sämtlich gleich 1 sind, aber auch, falls die P_k sich wie verschiedene Konstanten oder bekannte Funktionen der gegebenen Elemente verhalten, kommt man mit Ansätzen zum Ziele, die dem im vorigen Paragraphen benutzten ganz analog sind. Ein wesentlich neues Moment tritt dagegen auf, wenn statt der P_k eine Bedingung oder ein Prinzip gegeben ist, aus dem ein Gebilde bestimmt werden soll. Gelingt es aber, auf Grund jenes Prinzips das P_k-Verhältnis durch die gegebenen Elemente auszudrücken, so ist das Problem auf unsern Ansatz zurückgeführt.

Wie uns dies unter Zugrundelegung des Ponceletschen Prinzips gelungen ist, so gelingt es uns auch bei Annahme des Legendreschen Prinzips der kleinsten Quadratsumme; wir zeigen dies für folgende Aufgaben: Eine Grade aus drei Punkten, einen Kreis aus 4 und einen Kegelschnitt aus 6 Punkten so zu bestimmen, daß $\Sigma \omega_k^2$ ein Minimum wird. Man findet leicht, daß, an den oben gewählten Bezeichnungen festgehalten, für die Grade aus 3 Punkten die Proportion gilt:

$$P_1 : P_2 : P_3 = a_1 : a_2 : a_3.$$

Ergänzend bemerken wir, daß die fragliche Grade die Punkte so trennt, daß die Lote abwechselnd nach der einen und andern Seite liegen, und daß die Gleichung $\Sigma \omega_k = 0$ gilt. — Entsprechend haben wir für den gesuchten Punkt im Dreiseit (Grebescher oder Lemoinescher Punkt)

$$P_1 : P_2 : P_3 = \sin \alpha_1 : \sin \alpha_2 : \sin \alpha_3. \text{ —}$$

Der Kegelschnitt (Kreis), der die kleinste Entfernungsquadratsumme von 6 (4) festen Punkten hat, teilt die Punkte in ihrer Fußpunktfolge abwechselnd in innere und äußere; denn, wenn zwei auf einander folgende auf derselben Seite liegen, kann man durch die übrigen Fußpunkte einen Kegelschnitt (Kreis) legen, der beiden Punkten zugleich näher kommt. Um das P_k-Verhältnis für den Kegelschnitt zu berechnen, gehen wir auf das lineare Gleichungssystem des vorigen Paragraphen zurück, aus dem sich ergibt

$$2\frac{\partial \omega_k}{\partial b_{11}} = \frac{\xi_k^2}{g_k},$$

$$\frac{\partial \omega_k}{\partial b_{12}} = \frac{\xi_k \eta_k}{g_k},$$

$$2\frac{\partial \omega_k}{\partial b_{22}} = \frac{\eta_k^2}{g_k},$$

$$\frac{\partial \omega_k}{\partial b_{13}} = \frac{\xi_k}{g_k},$$

$$\frac{\partial \omega_k}{\partial b_{23}} = \frac{\eta_k}{g_k},$$

wo g_k für $g(\xi_k, \eta_k)$ steht.

Nun müssen aber, wenn $\Sigma \omega_k^2$ ein Minimum sein soll, die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial \Sigma \omega_k^2}{\partial b_{11}} = 2 \Sigma \omega_k \frac{\partial \omega_k}{\partial b_{11}}, \quad \frac{\partial \Sigma \omega_k^2}{2\, \partial b_{12}} = \Sigma \omega_k \frac{\partial \omega_k}{\partial b_{12}}, \quad \ldots$$

$$\frac{\partial \Sigma \omega_k^2}{2\, \partial b_{23}} = \Sigma \omega_k \frac{\partial \omega_k}{\partial b_{23}},$$

verschwinden und das ergibt:

$$\omega_1 \frac{\xi_1^2}{g_1} + \omega_2 \frac{\xi_2^2}{g_2} + \ldots + \omega_6 \frac{\xi_6^2}{g_6} = 0$$

$$\omega_1 \frac{\xi_1 \eta_1}{g_1} + \omega_2 \frac{\xi_2 \eta_2}{g_2} + \ldots + \omega_6 \frac{\xi_6 \eta_6}{g_6} = 0$$

. . . .

. . . .

$$\omega_1 \frac{\eta_1}{g_1} + \omega_2 \frac{\eta_2}{g_2} + \ldots + \omega_6 \frac{\eta_6}{g_6} = 0.$$

Folglich besteht für die ω_k und somit die P_k die Relation

$$P_1 : P_2 : P_3 : \ldots : P_6 = \alpha_{33}^{(1)} g_1 : \alpha_{33}^{(2)} g_2 : \alpha_{33}^{(3)} g_3 : \ldots : \alpha_{33}^{(6)} g_6$$
$$= a_{33}^{(1)} \varrho_1^{1/3} : a_{33}^{(2)} \varrho_2^{1/3} : a_{33}^{(3)} \varrho_3^{1/3} : \ldots : a_{33}^{(6)} \varrho_6^{1/3}.$$

Für den Kreis erhält man bei analogem Verfahren die Proportion:

$$P_1 : P_2 : P_3 : P_4 = a_{33}^{(1)} : a_{33}^{(2)} : a_{33}^{(3)} : a_{33}^{(4)}.$$

Es besteht somit in den von uns behandelten Fällen der übrigens allgemein gültige Satz: Das P_k-Verhältnis eines Gebildes, das nach dem Legendreschen Minimumprinzip aus einer einfach überbestimmenden Anzahl von Elementen gefunden wird, ist gleich dem Koeffizientenverhältnis der zugehörigen Differentialformel 1. Art.

Wir führen nun den Begriff der Differentialformeln 2. Art zunächst durch ein Beispiel ein. Ein Kegelschnittsechseck ist dadurch karakterisiert, daß in einem beliebigen der zugehörigen 60 Hexagramme die Schnittpunkte der 3 Gegenseitenpaare auf einer Graden, der Pascalschen, liegen. Liegen die 6 Ecken auf keinem Kegelschnitt, so bilden die 3 Schnittpunkte ein Dreieck, das wir als das Pascalsche Dreieck bezeichnen wollen. Ist nun die Abweichung des Sechsecks vom nächsten Kegelschnitt gleich ω, und die Abweichung des Pascalschen Dreiecks von der nächsten Graden gleich Ω, so bezeichnen wir den Ausdruck, der den Quotienten

$$\frac{\Omega}{\omega} = \Phi(x_1 y_1, x_2 y_2, \ldots x_6 y_6) \quad .$$

bis auf Glieder von den Ordnungen $\omega, \omega^2, \ldots$ genau liefert, oder etwas anders geschrieben, den Differentialquotienten

$$\left[\frac{d\Omega}{d\omega}\right]_{\omega = 0} = \Phi(\xi_1 \eta_1, \xi_2 \eta_2, \ldots \xi_6 \eta_6)$$

als Differentialformel 2. Art. Allgemein werden wir unter einer Differentialformel 2. Art eine Gleichung verstehen, die uns den Quotienten aus der Abweichung eines abgeleiteten Gebildes (Pascalsches Dreieck) und der Abweichung eines Urgebildes (Sechseck) liefert.

Wir gehen nun zur Untersuchung des Pascalschen Dreiecks über.

§ 8. Der Pascalsche Satz.

Aus den 60 Hexagrammen, die zu einem vorgegebenen konvexen Sechseck der in § 6 behandelten Art gehören, wählen wir ein bestimmtes aus und zwar eins von den dreien, bei denen das Pascalsche Dreieck in das Innere des konvexen Hexagramms fällt; es sind dies die Hexagramme mit den Folgen 136425, 146253

und 153624. Aus praktischen Rücksichten führen wir eine neue Numerierung der Eckpunkte ein, indem wir die Bezeichnung der Fig. 14 benutzen. Wir untersuchen nun zunächst den Inhalt $^1/_2 \Delta$ des Pascalschen Dreiecks und lassen hierbei das Vorzeichen zunächst ganz außer acht, da es sich schließlich leicht aus dem Umstande ergibt, daß bei der durch Fig. 14 festgesetzten Benennung Δ positiv ist, wenn $x_6 y_6$ ein äußerer Punkt ist.

Gibt man den Ecken des Pascalschen Dreiecks die Koordinaten $x^{(1)}, y^{(1)}$; $x^{(2)}, y^{(2)}$; $x^{(3)}, y^{(3)}$, so bestehen die 6 Gleichungen

$$\begin{cases} x^{(1)}(y_2 - y_3) - y^{(1)}(x_2 - x_3) = x_3 y_2 - x_2 y_3 \\ x^{(1)}(y_5 - y_6) - y^{(1)}(x_5 - x_6) = x_6 y_5 - x_5 y_6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^{(2)}(y_3 - y_4) - y^{(2)}(x_3 - x_4) = x_4 y_3 - x_3 y_4 \\ x^{(2)}(y_6 - y_1) - y^{(2)}(x_6 - x_1) = x_1 y_6 - x_6 y_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^{(3)}(y_4 - y_5) - y^{(3)}(x_4 - x_5) = x_5 y_4 - x_4 y_5 \\ x^{(3)}(y_1 - y_2) - y^{(3)}(x_1 - x_2) = x_2 y_1 - x_1 y_2. \end{cases}$$

Bezeichnen wir die drei Determinanten der drei Gleichungspaare mit $Z^{(1)}$, $Z^{(2)}$ und $Z^{(3)}$, wo also

$$\begin{aligned} Z^{(1)} &= (x_2 - x_3)(y_5 - y_6) - (x_5 - x_6)(y_2 - y_3), \\ Z^{(2)} &= (x_3 - x_4)(y_6 - y_1) - (x_6 - x_1)(y_3 - y_4), \\ Z^{(3)} &= (x_4 - x_5)(y_1 - y_2) - (x_1 - x_2)(y_4 - y_5) \end{aligned}$$

ist, so besteht bekanntlich die Identität

$$\Delta = \begin{vmatrix} x^{(1)} & y^{(1)} & 1 \\ x^{(2)} & y^{(2)} & 1 \\ x^{(3)} & y^{(3)} & 1 \end{vmatrix} = \frac{D}{Z^{(1)} Z^{(2)} Z^{(3)}},$$

wo $-D$ wieder die Sechsecksdeterminante bedeutet. Wie man sieht, ist $Z^{(3)}$ unabhängig von $x_6 y_6$ und mißt den doppelten Inhalt des konvexen Vierecks 5241; $Z^{(1)}$ ist gleich dem doppelten Inhalt des Vierecks 3526 und hat, wenn man $x_6 y_6$ als veränderlich ansieht und die Peripherie der Ellipse $F^{(6)} = 0$ durchlaufen läßt, zwei Nullstellen

$$x_6 = x_5, \qquad y_6 = y_5$$

und

$$x_6 = x'_5, \qquad y_6 = y'_5,$$

wo x'_5, y'_5 der Schnittpunkt der Ellipse mit der Parallelen durch $x_5 y_5$ zur Seite 32 ist. Entsprechend ist $Z^{(2)}$ gleich dem doppelten Inhalt des Vierecks 3641 und hat, wenn der veränderliche Punkt 6 die Ellipse durchläuft, die beiden Nullstellen

$$x_6 = x_1, \qquad y_6 = y_1$$

und

$$x_6 = x'_1, \qquad y_6 = y'_1,$$

wo $x'_1 y'_1$ den Schnittpunkt von $F^{(6)} = 0$ mit der Parallelen durch den Punkt 1 zur Seite 34 bedeutet.

Läßt man daher den 6. Punkt die Ellipse durchlaufen, so wird der Inhalt des Pascalschen Dreiecks an den bezeichneten 4 Stellen unbestimmt, während er an allen andern Stellen der Ellipse den Wert Null hat. Es verdient bemerkt zu werden, daß das Pascalsche Dreieck einen konstanten Inhalt hat, wenn sich $x_6 y_6$ auf einem Kegelschnitt bewegt, der durch die 4 Punkte 1, 1', 5, 5' geht, wobei diese 4 Punkte wieder Unbestimmtheitsstellen sind: man liest dies unmittelbar aus der Gleichung

$$D = \text{Konst.}\, Z^{(1)} . Z^{(2)} . Z^{(3)}$$

ab.

Wir transformieren nun $F^{(6)} = 0$ auf die Normalform und denken uns den Punkt $x_6 y_6$ veränderlich, und zwar von einem Punkte $\xi_6 \eta_6$ von $F^{(6)}$ in normaler Richtung um die veränderliche Entfernung ω_6 fortschreitend; dann ist

$$\left[\frac{d \varDelta}{d \omega_6}\right]_{\omega_6 = 0} = \frac{\left[\frac{d D}{d \omega_6}\right]_{\omega_6 = 0}}{Z^{(1)} Z^{(2)} Z^{(3)}},$$

weil D für $\omega_6 = 0$ verschwindet. Wir haben also bei der Bildung von $\varDelta$ für kleines ω_6 die Änderung der Größen $Z^{(k)}$ außer acht zu lassen und dürfen somit setzen

$$\varDelta = \frac{D}{Z^{(1)} Z^{(2)} Z^{(3)}},$$

wo D aus den Größen $x_1 y_1$, $x_2 y_2$, ... $x_5 y_5$, $x_6 y_6$, die Z dagegen aus den Größen $x_1 y_1$, $x_2 y_2$, ... $x_5 y_5$, $\xi_6 \eta_6$ gebildet sind. Bezeichnen wir die Entfernung der Punkte $x^{(1)} y^{(1)}$ und $x^{(2)} y^{(2)}$ mit L

und die zugehörige Höhe des Pascalschen Dreiecks mit $2\,\Omega$, so wird

$$\Omega = \frac{D}{2\,L\,.\,Z^{(1)}\,Z^{(2)}\,Z^{(3)}}.$$

Der Zähler hat auf Grund früherer Formeln den Wert

$$D = 2\,\omega_6\,a_{33}^{(6)}\,\varrho_6^{1/3}\,a^{-2/3}\,b^{-2/3};$$

der Nenner hat, wenn der Fußpunkt $\xi_6\,\eta_6$ die Peripherie von $F^{(6)}$ durchläuft, drei Nullstellen, nämlich

$$\xi_6 = x_1,\quad \eta_6 = y_1 \text{ (Nullstelle von } Z^{(2)})$$
$$\xi_6 = x_3,\quad \eta_6 = y_3 \text{ („ „ } L\text{)}$$
und
$$\xi_6 = x_5,\quad \eta_6 = y_5 \text{ („ „ } Z^{(1)});$$

denn die beiden anderen Nullstellen der Z entsprechen den beiden Unendlichkeitsstellen von L, und zwar so, daß das Produkt $L\,Z^{(1)}\,Z^{(2)}$ an beiden Stellen endlich bleibt, wie sich leicht aus der Betrachtung des am Eingange dieses Paragraphen aufgestellten Gleichungssystems ergibt. Bleibt also der Fußpunkt $\xi_6\,\eta_6$ auf den Bogen 24 beschränkt, so kann der Quotient $\Omega : \omega_6$ nirgends Null oder Unendlich werden.

Führt man statt ω_6 die Abweichung ω des nächsten Kegelschnitts ein, so ergibt sich die Differentialformel für den Pascalschen Satz in der Gestalt

$$\frac{\Omega}{\omega} = \frac{\Sigma\, a_{33}^{(k)}\,\varrho_k^{1/3}\,a^{-2/3}\,b^{-2/3}}{L\,.\,Z^{(1)}\,.\,Z^{(2)}\,.\,Z^{(3)}}.$$

Wie ersichtlich, ist auch dieser Quotient, solange $\xi_6\,\eta_6$ auf den Bogen 24 beschränkt bleibt, stets von Null und Unendlich verschieden; weitergehende Schlüsse auf die Werte, die der Quotient anzunehmen vermag, läßt die vorstehende Formel kaum zu; die dazu notwendige analytische Umgestaltung würde uns hier, wo es uns nur auf das Prinzipielle ankommt, zu weit führen; doch hoffen wir, an anderer Stelle die erwähnte Lücke ausfüllen zu können.

Kapitel IV.

Über elliptisch-konvexe Ovale.

§ 9. Definitionen und Voruntersuchungen.

Es sei $f(x\,y) = 0$ die Gleichung einer analytischen Kurve (M), die sich im Punkte $M(x\,y)$ regulär verhält und dort den Krümmungsradius ϱ aufweist. Wir legen durch M die Normale und die Tangente der Kurve und rechnen als positive Normalenrichtung die Richtung von M nach dem Krümmungsmittelpunkt und als positive Tangentenrichtung die Richtung, die sich durch Drehung der Normalen um M im Sinne des Uhrzeigers durch den Winkel $\frac{\pi}{2}$ ergibt. Es sei ferner mit φ der Winkel bezeichnet, den die positive Tangentenrichtung gegen die X-Achse bildet. Dann bestehen die Gleichungen

$$(1) \qquad \frac{dx}{d\varphi} = \varrho \cos\varphi; \qquad \frac{dy}{d\varphi} = \varrho \sin\varphi.$$

Bezeichnen wir den Abstand des Koordinatenursprungs O von der Normalen mit p und den von der Tangente mit q, und bestimmen die Vorzeichen so, daß p positiv ist, wenn O der Halbebene rechts von der Normalen angehört, und daß q positiv ist, wenn O in der Halbebene links von der Tangente liegt, dann gelten die Beziehungen

$$(2) \quad p = -x\,.\cos\varphi - y\,.\sin\varphi; \quad q = x\,.\sin\varphi - y\,.\cos\varphi.$$

Differentiiert man nach φ, so folgt:

$$\frac{dp}{d\varphi} = x\sin\varphi - y\cos\varphi - \frac{dx}{d\varphi}\cos\varphi - \frac{dy}{d\varphi}\sin\varphi$$

$$\frac{dq}{d\varphi} = x\cos\varphi + y\sin\varphi + \frac{dx}{d\varphi}\sin\varphi - \frac{dy}{d\varphi}\cos\varphi.$$

Berücksichtigt man die Gleichungspaare (1) und (2), so ergeben sich die „Fundamentalgleichungen der natürlichen Geometrie“ in der Form

$$\frac{dp}{d\varphi} = q - \varrho; \qquad \frac{dq}{d\varphi} = -p.$$

Wir verlegen nun den Anfangspunkt des Koordinatensystems in den Kurvenpunkt M und wählen die Tangente zur X-Achse, die Normale zur Y-Achse; es läßt sich dann die Gleichung von (M) in der Form schreiben

$$y = a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

Wählt man auf (M)

$$r = \frac{n(n+3)}{2}$$

Punkte beliebig aus — die Ordnung von (M) größer als n vorausgesetzt —, so kann man durch diese Punkte eine i. a. eindeutig bestimmte C_n legen. Rücken die r-Punkte unbegrenzt zusammen und fallen in der Grenze mit dem Nullpunkte zusammen, so geht die C_n in eine i. a. völlig bestimmte C_n über, die im Nullpunkte eine r-punktige Berührung mit (M) hat; man bezeichnet sie als die in O oskulierende C_n von (M).

Spezialisieren wir die C_n zu einem Kegelschnitt, dann wird eine 5-punktige Berührung vorliegen und es hat der oskulierende Kegelschnitt eine Gleichung von der Gestalt

$$(3) \qquad y = \frac{1}{2}(\alpha x^2 + \beta y^2 + 2\gamma x y).$$

Differentiiert man diese Gleichung viermal nach φ und führt für die k-te Ableitung von ϱ nach φ die Abkürzung ϱ_k ein, so bestimmen sich die Koeffizienten in (3) zu

$$\alpha = \frac{1}{\varrho}, \qquad \beta = \frac{9\varrho^2 + 5\varrho_1^2 - 3\varrho\varrho_2}{9\varrho^3}, \qquad \gamma = -\frac{\varrho_1}{3\varrho^2}.$$

Erteilt man β statt des vorstehenden Wertes eine stetige Folge von reellen Werten, so liefert die Gleichung (3) eine einparametrige Schar von Kegelschnitten, die mit (M) die Tangente und die Größen ϱ und ϱ_1 gemein haben, und daher (M) im Nullpunkte

4-punktig berühren; unter ihnen gibt es eine einzige Parabel, die Schmiegungsparabel, die durch das Verschwinden der Determinante $\alpha\beta - \gamma^2$ karakterisiert ist, während $\alpha\beta - \gamma^2 > 0$ den Ellipsen, $\alpha\beta - \gamma^2 < 0$ den Hyperbeln der Schar zukommt. Bildet man den Ausdruck $\alpha\beta - \gamma^2$ für (M), so erhält man

$$\frac{1}{9\varrho^3}(9\varrho^2 + 4\varrho_1^2 - 3\varrho\varrho_2) = \frac{P}{9\varrho^3},$$

und es ist der positive oder negative Wert von P das Kriterium dafür, ob der oskulierende Kegelschnitt eine Ellipse oder eine Hyperbel ist. Zugleich ergibt sich als Gleichung der Schmiegungsparabel

$$18\varrho^3 y = (3\varrho x - \varrho_1 y)^2.$$

Wir nennen nun eine Kurve (M) in einem Punkte M elliptisch oder hyperbolisch gekrümmt, je nachdem für den betreffenden Punkt die Ungleichung

$$P > 0 \qquad \text{oder} \qquad P < 0$$

gilt, und bezeichnen M als eine elliptische oder hyperbolische Stelle der Kurve.

Da für eine elliptische Stelle von (M) ϱ_2 von (M) kleiner ist, als ϱ_2 der Schmiegungsparabel, so liegt letztere in der Umgebung von M außerhalb von (M), wenn man als innere Seite diejenige bezeichnet, auf der der Krümmungsmittelpunkt liegt.

Wir nennen einen im Endlichen geschlossenen Kurvenzug ohne Punkt- und Tangentensingularität, der in jedem seiner Punkte elliptisch gekrümmt ist, ein elliptisch-konvexes Oval.

Dann besteht das Theorem: *Fünf beliebige Punkte eines elliptisch-konvexen Ovals liegen stets auf einer Ellipse.*

Wir schicken dem Beweise dieses Satzes eine geometrische Betrachtung voraus, die wir der persönlichen Mitteilung von Herrn Minkowski verdanken.

Es sei (M) ein elliptisches Oval und C ein beliebiger Punkt der Ebene, der Aufpunkt; es sei ferner φ wie oben der Winkel eines Punktes M von (M) und ϱ der zugehörige Krümmungsradius. Tragen wir vom Aufpunkt C in der Richtung $\varphi - \frac{\pi}{2}$ die Größe $\varrho^{-1/3}$ ab und errichten im Endpunkte ein Lot, dann umhüllt die

Gesamtheit aller dieser Lote eine Kurve (M_0), die wir als das Krümmungsbild von (M) bezeichnen, und von der wir behaupten, daß sie ein konvexes Oval bildet.

Denn führt man wie oben ein pq-System ein, das einen beliebigen Punkt M_0 von (M_0) zum Nullpunkt, seine Tangente zur p-Achse und die Normale zur q-Achse hat, und bezeichnet den Krümmungsradius von M_0 mit ϱ_0, so hat man auf Grund der Fundamentalgleichungen

$$\frac{dp}{d\varphi} = q - \varrho_0; \quad \frac{d^2 q}{d\varphi^2} = -\frac{dp}{d\varphi}; \quad \varrho_0 = q + \frac{d^2 q}{d\varphi^2};$$

da aber nach Konstruktion $q = \varrho^{-1/3}$ ist, ergibt sich

$$\varrho_0 = \varrho^{-1/3} + \frac{d^2 \varrho^{-1/3}}{d\varphi^2} = \frac{9\varrho^2 + 4\varrho_1^2 - 3\varrho\varrho_2}{9\varrho^{7/3}} = \frac{P}{9\varrho^{7/3}}.$$

Da für (M) P positiv ist, ist der Krümmungsradius von (M_0) positiv, d. h. (M_0) ist eine konvexe Kurve. Das Krümmungsbild eines elliptisch-konvexen Ovals ist also ein konvexes Oval, das den Aufpunkt umschließt.

Das Krümmungsbild einer Ellipse ist eine ähnliche, ähnlich gelegene Ellipse.

Beweis: Man erteile der Ellipsengleichung die Gestalt

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{2y}{b},$$

dann werden die Ableitungen von y nach x

$$y' = \frac{b}{a^2} x \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^{-1/2} \quad \text{und} \quad y'' = \frac{b}{a^2}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^{-3/2}.$$

Ersetzt man y' durch $\operatorname{tg}\varphi$, so wird

$$y'' = a^{-2} b^{-2} (a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi + b^2)^{3/2}.$$

Also bekommt man für den Krümmungsradius

$$\varrho = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}$$

den Ausdruck

$$\varrho = \frac{a^2 b^2}{(a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)^{3/2}}.$$

Es wird somit $q = \varrho^{-1/3}$

$$q = \frac{(a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)^{1/2}}{(a\,b)^{2/3}}.$$

Die Linienkoordinaten der Tangente von (M_0), die den Abstand q von C und die Richtung φ hat, sind

$$u = -\frac{\sin \varphi}{q} \quad \text{und} \quad v = \frac{\cos \varphi}{q};$$

dadurch geht die letzte Gleichung über in

$$(a\,b)^{4/3} = a^2 u^2 + b^2 v^2.$$

Dies ist aber die Klassengleichung einer der ursprünglichen ähnlichen und ähnlich gelegenen Ellipse.

Wir erhalten aus der Ausgangsellipse eine Parabel, wenn wir die Gleichung mit a^2 erweitern, $\frac{a^2}{b} = \bar{\omega}$ setzen und dann b bei konstant gehaltenem $\bar{\omega}$ unendlich werden lassen. Dividieren wir andrerseits die resultierende Klassengleichung durch b^2, ersetzen $\frac{a^2}{b}$ durch $\bar{\omega}$ und lassen nun b unendlich werden, so erhalten wir die Gleichung des Krümmungsbildes der Parabel $x^2 = 2\,\bar{\omega}\,y$ in der Gestalt

$$\bar{\omega}^{2/3} = v^2 \quad \text{oder} \quad -\frac{1}{v} = \pm\,\bar{\omega}^{-1/3}.$$

Das Krümmungsbild der Parabel $x^2 = 2\,\bar{\omega}\,y$ ist also ein Punktepaar, das vom Aufpunkte in der Achsenrichtung der Parabel um $\pm\,\bar{\omega}^{-1/3}$ entfernt liegt. Für alle im Endlichen gelegenen Punkte der Parabel kommt jedoch nur der Punkt P_0 mit dem unteren Vorzeichen in Betracht, da der Winkel φ in die Grenzen

$$-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$$

eingeschlossen bleibt.

§ 10. Hilfssätze.

Wählen wir in der Ebene ein konvexes Viereck aus, so gehen durch die 4 Ecken zwei Parabeln mit verschiedenen Achsenrichtungen und bilden dabei zwei zusammenstoßende Sicheln von endlichem Flächeninhalt. Wir können nun die 4 Eckpunkte in ihrer konvexen Folge, vom Endpunkte einer Sichel beginnend, durchnumerieren, indem wir als zweiten Punkt den gemeinsamen Punkt der beiden Sicheln nehmen und als dritten den Endpunkt der zweiten Sichel. Die Reihenfolge dieser drei Punkte setzt auch einen Durchlaufungssinn für die Parabelbögen fest. Wir wollen auf jeder der Parabeln als positiven Ast von 2 aus den benennen, der die Punkte enthält, die auf 2 wie 3 folgen. Dann liegt der vierte Schnittpunkt zweier Parabeln auf ungleichsinnigen Ästen. Hieraus folgt aber für beliebig benachbarte Parabeln der Satz:

Sind zwei Parabeln mit drei reellen im Endlichen gelegenen Schnittpunkten hinreichend benachbart, so liegt der vierte beliebig weit.

Einen speziellen Fall bilden Parabeln, die sich in einem Punkte dreipunktig oskulieren.

Wir gehen nun dazu über, aus den Eigenschaften der Krümmungsbilder von Parabel und elliptisch-konvexem Oval Folgerungen über Berührungen zwischen diesen Kurven zu ziehen und folgende drei Sätze zu beweisen.

I. Eine Parabel (P) kann ein elliptisch-konvexes Oval (M) nicht zweimal von innen berühren. (Fig. 15.)

Angenommen (P) berühre (M) in C_1 und C_2 beidemale von innen und zwar zweipunktig, dann wird in beiden Punkten $\varrho_P < \varrho_M$ sein. Nehmen wir C_1 zum Aufpunkte von (M_0) und P_0, dann müssen die beiden Strahlen durch P_0, die den Punkten C_1 und C_2 entsprechen, ganz außerhalb von (M_0) liegen, da ja $\varrho_P^{-1/3} > \varrho_M^{-1/3}$ ist. Hieraus aber folgt, daß auch für alle Punkte gleichen Winkels zwischen C_1 und C_2 $\varrho_P < \varrho_M$ sein muß. Legen wir jetzt ein rechtwinkliges Koordinatensystem mit C_1 als Anfangspunkt und mit $P_0 C_1$ als Y-Achse fest, dann drückt sich die Abszisse eines beliebigen Punktes der beiden Kurven (M) und (P) durch die Gleichungen aus:

$$x_M = \int_{\varphi_1}^{\varphi} \varrho_M \cos\varphi \, d\varphi; \qquad x_P = \int_{\varphi_1}^{\varphi} \varrho_P \cos\varphi \, d\varphi.$$

Da wegen der Wahl des Koordinatensystems $\cos\varphi$ stets positiv ist, können die beiden Integrale, φ_2 als obere Grenze eingeführt, unmöglich gleich sein, vielmehr muß stets $x_M > x_P$ sein. — Im Falle, daß die Berührung in C_1 oder C_2 dreipunktig ist, gehen die Strahlen durch P_0 in Tangenten an (M_0) über; dann gilt die Ungleichung zwischen den Krümmungsradien zwar nicht für C_1 und C_2, wohl aber für alle Zwischenpunkte, und somit wird auch hier der zweite Integralwert kleiner als der erste.

II. (P) kann nicht (M) einmal von außen und einmal von innen berühren. (Fig. 16.)

Nehmen wir wieder das Gegenteil als vorliegend an, so haben wir, wenn in C_1 (P) das Oval von innen, in C_2 von außen berührt, noch einen dritten Inzidenzpunkt C_3 zwischen C_1 und C_2, wo (P) aus (M) heraustritt. Legen wir durch C_1 eine zu (P) benachbarte Parabel (P'), die (P) so oskuliert, daß ihr positiver Ast innerhalb von (P) liegt, so löst sich, wenn sich (P') mehr und mehr von (P) entfernt, C_2 in 2 Schnittpunkte auf, von denen der eine C_2' auf C_3 zuwandert, während gleichzeitig C_3 gegen C_2' hinrückt; es existiert daher auch eine Parabel, die (M) zweimal von innen berührt, womit der Satz auf den vorhergehenden zurückgeführt ist.

III. (P) kann nicht (M) oskulieren und außerdem noch schneiden. (Fig. 17.)

Wenn wir wieder ein Koordinatensystem wie in I. verabreden mit dem Oskulationspunkte C_1 als Nullpunkt und die Krümmungsbilder P_0 und (M_0) zeichnen, dann muß P_0 auf (M_0) liegen und es muß zugleich die Tangente an (M_0) in P_0 parallel zur gemeinsamen Tangente von (P) und (M) in C_1 sein. Denn einerseits muß der Parallelstrahl zur Tangente in C_1 durch P_0 (M_0) berühren, da für C_1 $\varrho_P = \varrho_M$ ist, und andrerseits muß jeder beliebig benachbarte Strahl durch P_0 die Kurve (M_0) schneiden, da für die Punkte der Umgebung von C_1 $\varrho_P^{-1/3} < \varrho_M^{-1/3}$ ist. Dies kann aber nur dann der Fall sein, wenn P_0 auf (M_0) liegt.

Angenommen nun, (P) träte mit seinem positiven Aste noch einmal ins Innere von (M), und zwar im Punkte C_2, dann ist $\varphi_2(P)$ sicher größer als $\varphi_2(M)$. Nun gelten für die Abszissen der Punkte von (P) und (M) wieder die bezüglichen Gleichungen

$$x_P = \int_{\varphi_1}^{\varphi_P} \varrho_P \cos\varphi \, d\varphi; \qquad x_M = \int_{\varphi_1}^{\varphi_M} \varrho_M \cos\varphi \, d\varphi.$$

Führen wir als obere Grenzen die Winkel des Schnittpunktes C_2 ein und zerlegen das erste Integral in 2 positive Bestandteile:

$$x_P = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2(M)} \varrho_P \cos\varphi \, d\varphi + \int_{\varphi_2(M)}^{\varphi_2(P)} \varrho_P \cos\varphi \, d\varphi; \quad x_M = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2(M)} \varrho_M \cos\varphi \, d\varphi,$$

und berücksichtigen wir, daß hierin für jedes beliebige φ mit Ausnahme von φ_1 die Ungleichung $\varrho_P > \varrho_M$ besteht, so erkennen wir, daß schon der erste Bestandteil von x_P größer als x_M ist, daß also die Ungleichung $x_P > x_M$ a fortiori gilt. Damit ist aber die Unmöglichkeit eines Schnittpunktes erwiesen.

Aus dem Satze III können wir die Folgerung ziehen, daß eine (M) in C_1 dreipunktig berührende Parabel (P) auf dem austretenden (positiven) Aste (M) nicht treffen kann. Denn angenommen, es wäre dies der Fall, so lege man in C_1 an (M) die Schmiegungsparabel (P'); da ihr negativer Ast, der ganz außerhalb von (M) liegt, auch außerhalb von (P) liegen muß, so tritt (P') bei C_1 in (P) ein, und hat dann, weil ja der vierte Schnittpunkt von (P) und (P') auf den abgewandten Ästen liegt, keinen Schnittpunkt mehr mit dem positiven Aste von (P), muß also, wenn (P) noch einmal in (M) eintritt, das gleiche tun, was dem vorigen Satze widerspricht.

In ähnlicher Weise läßt sich aus Satz I folgern, daß, wenn (P) in C_1 dreipunktig berührt, auf dem eintretenden Aste nicht drei Schnittpunkte mit (M) liegen können, denn in diesem Falle müßte es unter den (P) in C_1 oskulierenden Parabeln eine geben, die (M) zweimal von innen berührt, was gegen Satz I verstößt.

§ 11. Beweis und Folgerung.

Wir führen nun den Beweis des in § 9. angekündigten Theorems mit Hilfe folgender Überlegung: Angenommen, man könnte 5 Punkte von (M) so auswählen, daß sie auf einer Hyperbel liegen, so lassen sie sich auch so auswählen, daß sie einer Parabel angehören, da man ja durch hinreichend nahes Zusammenrücken der 5 Punkte Ellipsen erhält. Das Theorem wird also bewiesen sein, wenn wir gezeigt haben, daß 5 Punkte von (M) nie auf einer Parabel liegen können.

Die angenommene Parabel (P) habe also 6 Schnittpunkte

mit (M) gemein; wir wollen sie, wenn wir (P) vom unendlich fernen Punkte aus im positiven Sinne durchlaufen, mit C_1, $C_2 \ldots C_6$ bezeichnen. Können wir nun zeigen, daß der schnittpunktfreie Bogen $C_6 C_1$ von (M) kein Maximum sein kann, so können wir die Parabelschnittpunkte so nahe zusammenschieben, bis wir entweder zu einer 6-punktig berührenden Parabel oder zu einem der schon als unmöglich dargetanen Fälle gelangen, womit die Unmöglichkeit der Annahme gezeigt ist.

Wir verstehen unter B_1 einen Schnittpunkt und unter B_2, B_3, B_4 eine 2-, 3-, 4-punktige Berührung von (M) und (P). Dann umfaßt folgende Tabelle alle denkbaren Fälle:

$6\,B_1$	I
$4\,B_1 + B_2$	IIa, IIb, IIc
$2\,B_1 + 2\,B_2$	IIIa, IIIb**), IIIc*), IIId
$3\,B_2$	IV
$3\,B_1 + B_3$	Va†), Vb††)
$B_1 + B_2 + B_3$	VIa**), VIb††), VIc*)
$2\,B_3$	VII*)
$2\,B_1 + B_4$	VIII***)
$B_2 + B_4$	IX***)

*) Satz I
**) Satz II
***) Satz III
†) Folgerung aus I
††) Folgerung aus III.

während die verschiedenen Anordnungen in den Unterfällen durch die Symbole gegeben sind:

IIa $= 4\,B_1 + B_2$	IIId $= B_2 + 2\,B_1 + B_2$
IIb $= 3\,B_1 + B_2 + B_1$	Va $= 3\,B_1 + B_3$
IIc $= 2\,B_1 + B_2 + 2\,B_1$	Vb $= 2\,B_1 + B_3 + B_1$
IIIa $= 2\,B_1 + 2\,B_2$	VIa $= B_1 + B_2 + B_3$
IIIb $= B_1 + B_2 + B_1 + B_2$	VIb $= B_1 + B_3 + B_2$
IIIc $= B_1 + 2\,B_2 + B_1$	VIc $= B_2 + B_1 + B_3$

Von diesen 17 denkmöglichen Fällen sind die mit einem Zeichen versehenen 10 Fälle bereits auf Grund der Sätze I bis III nebst Folgerungen erledigt; in den 7 noch übrigen Fällen weisen wir durch Angabe einer Hilfsparabel (P′) direkt nach, daß $C_1 C_6$ kein Maximum ist.

Im Fall I verschieben wir (P) parallel zur Achse in den Außenraum der Parabel; bei IIa—IIc zeichnen wir (P′) ähnlich zu (P) und im Berührungspunkt B_2 von außen berührend.

In den Fällen IIId, IV und IIIa führt folgende Überlegung zum Ziele: Es sei ein konvexer Kurvenbogen (M) gegeben, der an seinen Enden von einem Parabelbogen (P) je zweipunktig berührt wird, und zwar in dem einen Endpunkte, A, von außen, im andern, B, beliebig. Wählen wir auf dem Bogen (M) in der Umgebung von A einen Punkt A′ aus und zeichnen die Parabel (P′), die (M) in A′ und B berührt, dann liegt der neue Parabelbogen ganz innerhalb des alten. Da nämlich in A der Krümmungsradius von (P) größer ist als der von (M), kann man A′ stets so nahe an A wählen, daß (P′) in der Umgebung von A′ ganz außerhalb von (M) liegt. Aus diesem Grunde muß aber die Verlängerung des Bogens (P′) über A′ hinaus (P) in der Umgebung von A und A′ schneiden. Da ferner der vierte Schnittpunkt von (P) und (P′) durch zweckmäßige Wahl von A′ beliebig weit hinausgerückt werden kann, darf er nicht auf dem endlichen Bogenstück A′B liegen. Wir haben somit folgendes Gesamtbild:

Die Parabel (P′) liegt auf dem endlichen Bogen (A′B) ganz innerhalb von (P), hat in der Umgebung von A einen Schnittpunkt mit (P), sodaß sie auf der Verlängerung der Bögen über A′ und A hinaus ganz außerhalb von (P) bleibt, während sie bei Verlängerung über B hinaus ganz innerhalb von (P) verläuft.

Wenn wir in den Fällen IIId und IV die Hilfsparabel (P′) so zeichnen, daß sie (M) in C_{12} und einem C_{56} benachbarten Punkte C′ des Bogens C_1C_6 berührt; und wenn wir ferner im Falle IIIa (P′) so wählen, daß sie (M) in C_{12} und in einem C_{34} benachbarten Punkte C′ des Bogens C_1C_4 berührt: so ergibt der eben bewiesene Satz unmittelbar die Verkleinerung von C_6C_1.

Damit ist aber das Theorem bewiesen. Wir gehen nun zum Beweise des Theorems über: Fünf beliebige Tangenten eines elliptisch-konvexen Ovals (M) sind stets Tangenten einer Ellipse. Auch hier besteht der leitende Gedanke darin, daß bei beliebig nahem Zusammenrücken der 5 Tangenten gegen eine feste die Oskulationsellipse als Grenzgebilde auftritt, und daß somit, wenn 5 Tangenten von (M) einer Hyperbel angehören, beim Zusammenrücken der Tangenten einmal eine Parabel als Übergangsfall auftreten muß.

Die oskulierenden Kegelschnitte einer Kurve haben (außer der Kurve selbst) keine Enveloppe, sondern eine Grenzkurve,

die aus Bögen der superoskulierenden Kegelschnitte extremen Achsenprodukts zusammengesetzt ist. Für (M) wird jedenfalls diese Grenzkurve aus höchstens 2 geschlossenen Zügen bestehen, die beide ganz im Endlichen gelegen sind und zwar so, daß (M) die beiden Züge trennt, falls der innere Zug überhaupt vorhanden ist. Den äußeren Zug, der aus den Bögen $F^{(1)}$, $F^{(2)}$, ... gebildet ist, vervollständigen wir durch Hinzunahme der äußeren gemeinsamen Tangenten zweier Bögen zu einer konvexen Kurve H.

Unterwirft man die Ebene von (M) einer projektiven Transformation derart, daß die Fluchtgrade H nicht schneidet oder berührt, so geht (M) wieder in ein elliptisches Oval (M') über: denn alle oskulierenden Kegelschnitte sind wieder Ellipsen. Daraus ergibt sich aber, daß die Ellipsen, die durch 5 beliebige Punkte von (M) gehen, H zur äußeren Grenzkurve haben; denn andernfalls wäre es möglich, durch projektive Umformung ein elliptisches Oval (M') zu finden, das dem bewiesenen Theorem nicht genügt.

Es gilt ferner der allgemeine Satz: Zwei konvexe Kurven haben, wenn sie sich nicht schneiden und die eine nicht die andere einschließt, 4 Tangenten gemein; falls sie sich aber schneiden, haben sie eben so viele gemeinsame Tangenten wie Schnittpunkte.

Es sei nun (P) irgend eine Parabel in der Ebene von (M), so unterwerfen wir wieder die Ebene einer projektiven Transformation, und zwar so, daß die Fluchtgrade weder H noch (P) berührt oder schneidet. Dann ist das Bild (M') von (M) ein elliptisches Oval und das Bild von (P) eine Ellipse (E). Da (P) mit (M) höchstens 4 Schnittpunkte gemein haben kann, gilt dasselbe über (E) und (M'); hieraus folgt aber, daß auch (E) mit (M') höchstens 4 Tangenten gemein haben kann; somit gilt dasselbe von (P) und (M), womit das angekündigte Theorem erwiesen ist.

Inhaltsübersicht.

Lebenslauf.

Ich, **Paul Böhmer**, wurde geboren am 21. Februar 1877 in Goschütz als Sohn des damaligen Schloßpredigers Paul Böhmer, jetzigen Superintendenten in Marienwerder. Ich besuchte die Volksschule meines Geburtsorts, dann das Gymnasium in Oels bis Ostern 1895 und von da ab das Gymnasium in Marienwerder, das ich Ostern 1897 mit dem Reifezeugnis verließ. Um Mathematik, Physik und Philosophie zu studieren, bezog ich zunächst die Universität Breslau und ging dann Ostern 1898 nach Königsberg, wo ich zugleich meiner Dienstpflicht beim Inf.-Reg. No. 146 genügte. Ostern 1899 setzte ich meine Studien in Berlin fort und wandte mich Ostern 1899 nach Göttingen, wo ich am 14. Juni 1902 das Staatsexamen bestand.

Teilgenommen habe ich an den Vorlesungen bezw. Seminaren der Herren: Des Coudres, Ebbinghaus, Freudenthal, Frobenius, Hettner, Hilbert, Klein, G. E. Müller, Riecke, Rosanes, Schilling, H. A. Schwarz, Sommer, Sturm, Vahlen und Voigt.

Allen diesen meinen verehrten Lehrern gilt mein Dank, besonders aber den Herren Professoren F. **Klein**, D. **Hilbert** und H. **Minkowski**, denen ich reiche wissenschaftliche Anregung verdanke. Auch einigen Mitgliedern des Göttinger Mathematischen Vereins bleibe ich dauernd dankbar für mancherlei Anregung und Unterstützung bei meinen Studien.

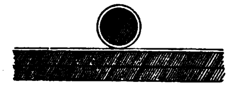


Fig. 1

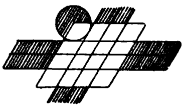


Fig. 2

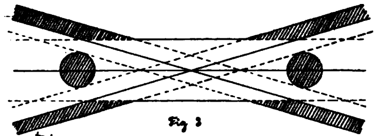


Fig. 3

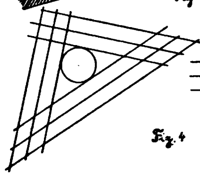
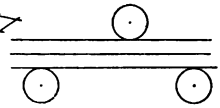


Fig. 4



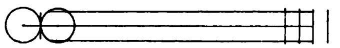


Fig. 5

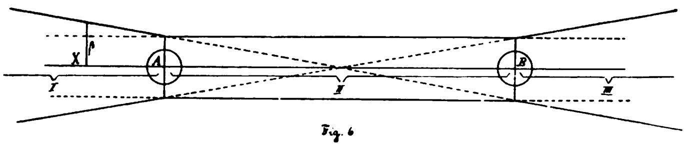


Fig. 6

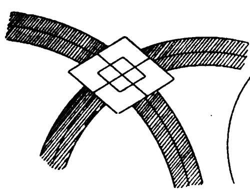


Fig. 7

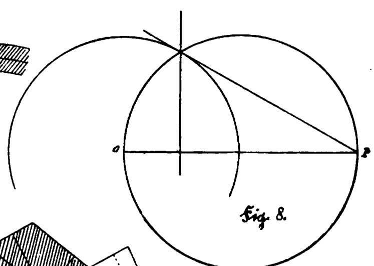


Fig. 8.

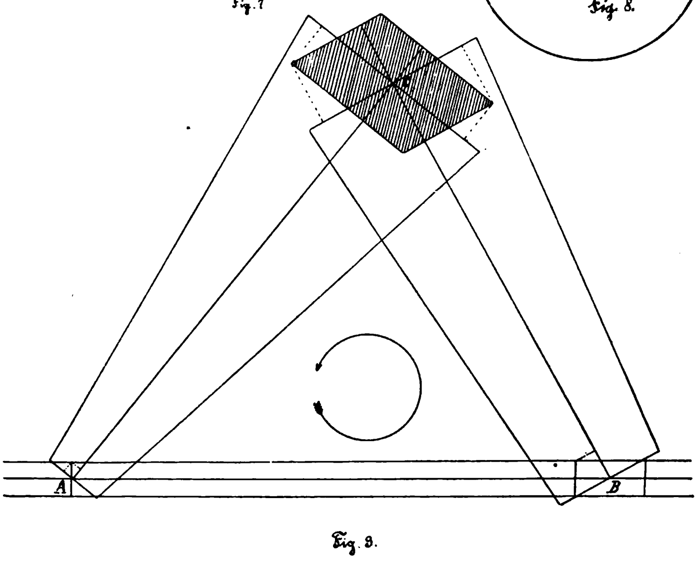


Fig. 9.

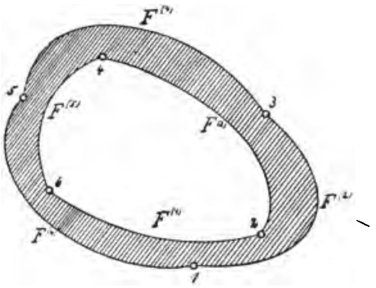


Fig. 10

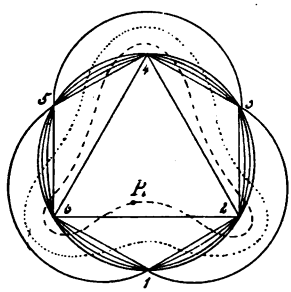


Fig 11

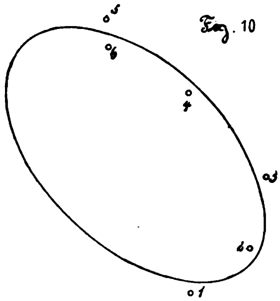


Fig 12.

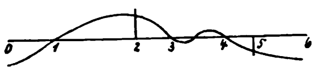


Fig. 13.

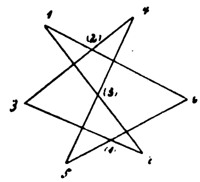


Fig 14

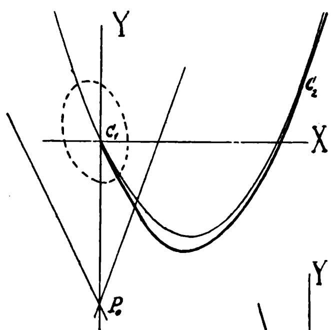
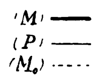


Fig. 15.



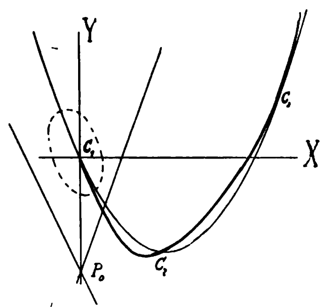


Fig 16

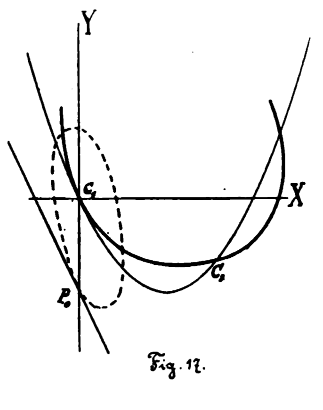


Fig. 17.